

Lector univ. dr. MONICA FLORA

CURS DE FIZICĂ

**Editura Universității din Oradea
2010**

CUPRINS

	Pag.
CAP.I. MĂRIMI ȘI UNITĂȚI FUNDAMENTALE	5
I.1. Introducere	5
I.2. Unități de măsură. Sisteme de unități	5
CAP.II. MECANICA PUNCTULUI MATERIAL	7
II.1. Introducere	7
II.2. Cinematica punctului material	8
II.3. Principiile dinamicii	11
II.4. Lucru mecanic. Energia mecanică	12
II.5. Momentul cinetic	16
II.6. Gravitația	22
CAP. III. OSCILAȚII ȘI UNDE	29
III.1. Caracteristici generale	29
III.2. Fenomene specifice undelor	31
III.3. Câmpul sonor	38
III.4. Efectul Doppler	39
CAP. IV. ELECTROMAGNETISM	41
IV.1. Mărimi fizice caracteristice câmpului electromagnetic	41
IV.2. Câmpul electrostatic	42
IV.3. Lucrul mecanic al forțelor electrice. Energia câmpului electric	46
IV.4. Potențialul electric	49
IV.5. Câmpul magnetic	52
IV.6. Câmpul magnetic în substanțe	55
IV.7. Ecuațiile lui Maxwell ale câmpului electromagnetic	59
IV.8. Energia câmpului electromagnetic. Teorema lui Poynting	61
IV.9. Potențialele electrodinamice	63
IV.10. Teoria electromagnetică a luminii	64
Cap. V. BAZELE FIZICII CUANTICE	67
V.1. Despre electron în limbaj ondulatoriu și corpuscular	67
V.2. Construirea ecuației lui Schrödinger monodimensionale	70
V.3. Interpretarea probabilistică a undelor de Broglie	72
V.4. Ecuația lui Schrödinger	74
V.5. Ecuația Schrödinger temporală	75
V.6. Condiții care se impun funcției de undă. Valori proprii. Funcții proprii	76

V.7. Numere cuantice	77
CAP. VI. NOȚIUNI GENERALE DE TERMODINAMICĂ	78
VI.1. Sistem termodinamic. Stare a sistemului. Parametrii termodinamici	78
VI.2. Mărimi energetice specifice sistemelor termodinamice	78
VI.3. Echilibrul termic, noțiunea de temperatură, termometrie	81
VI.4. Structura discretă a substanței. Molul	82
VI.5. Principiile termodinamicii	83
VI.6. Aplicații ale principiilor termodinamicii	85
VI.7. Distribuția moleculelor funcție de viteză	89
VI.8. Distribuția moleculelor unui gaz în câmp gravitațional	93
VI.9. Legea lui Boltzmann	95
VI.10. Potențiale termodinamice	95
VI.11. Semnificația statistică a potențialelor termodinamice	97
CAP. VII. APLICAȚII	102
VII. 1. Celula fotovoltaică	102
VII. 2. Pompe de căldură	105
VII. 3. Energia nucleară	108

CAP.I. MĂRIMI ȘI UNITĂȚI FUNDAMENTALE

I.1. Introducere

Obiectul fizicii îl constituie cunoașterea lumii înconjurătoare în totalitate, și anume de la microcosmos (structura atomilor și moleculelor) până la macrocosmos. Unul din scopurile esențiale ale învățării fizicii este aplicarea cât mai corectă și cât mai completă în practica productivă a legilor acesteia.

Fizica, prin obiectul său, se definește ca o știință fundamentală care studiază structura și proprietățile materiei, fenomenele legate de transformările acesteia și legile generale care guvernează procesele din univers. Așadar cunoștințele noastre despre lumea materială se extind actualmente pe un domeniu spațial de peste 40 de ordine de mărime, adică, de la 10 bilioane de ani-lumină (10^{26} m) până la o bilionime de micron (10^{-15} m). La o extindere temporală foarte mare au ajuns cunoștințele despre durata de viață a unor particule și sisteme. Astfel, de la vârsta unei galaxii la timpul mediu de viață a unor particule elementare există o diferență de 35 de ordine de mărime.

Sistemele de care se ocupă fizica sunt alcătuite din corpuri și câmpuri iar interacțiunile între elementele sistemelor se manifestă prin forțe și momente. Rezultatul acestor interacțiuni este mișcarea, transformarea. Prin urmare, fizica are ca obiect de studiu cele mai generale forme de mișcare a materiei precum și legătura reciprocă dintre acestea.

Teoriile care descriu evoluția sistemelor fizice la scară microscopică sunt numite, adesea, *teorii clasice*. Ele sunt în unele cazuri, folosite și în studiul anumitor sisteme în care apare structura moleculară ca de exemplu în teoria moleculară a gazelor. Studiul experimental arată însă că, la scară microscopică, ori de câte ori e nevoie de o aproximație mai bună, teoriile clasice nu sunt suficiente. În acest caz sunt folosite teorii de alt tip, numite *teorii cuantice*. Tot prin studiu experimental se poate arăta că, într-adevăr, elementele din care sunt alcătuite sistemele cu care se ocupă fizica microscopică se comportă în unele cazuri ca și particule, în alte cazuri ca și unde.

Unele legi ale fizicii sunt generale, cele în care apar constantele universale, iar alte legi, exprimate prin relații care conțin constante caracteristice diferitelor materiale, se numesc legi de material.

1.2. Unități de măsură. Sisteme de unități

În procesul de cunoaștere, trecerea de la observarea calitativă a unui fenomen la cercetarea lui cantitativă impune determinarea valorilor mărimilor fizice ce caracterizează sistemul studiat, deci efectuarea unor măsurători. A măsura o mărime înseamnă a o compara cu o mărime de aceeași natură, considerată ca unitate. O mărime A , măsurată cu o anumită unitate $[a]$ are o valoare a ; măsurată cu o unitate $[A']$ are o valoare a' etc., astfel încât:

$$A = a[A] = a'[A']$$
$$\frac{a}{a'} = \frac{[A']}{[A]}$$

ceea ce exprimă faptul că raportul valorilor unei mărimi, obținute în urma folosirii a două unități de măsură, este egal cu inversul raportului celor două unități. Rezultă, deci, că valorile unei mărimi măsurate cu diferite unități de măsură, sunt într-un anumit raport, care depinde de raportul dintre unitățile de măsură respective. Din cele de mai sus rezultă, de asemenea că raportul valorilor a două mărimi de aceeași specie nu depinde de unitatea de măsură folosită (principiul semnificației absolute a unei valori relative).

O lege fizică exprimă o relație între mai multe mărimi. În general în formula care concretizează această relație, pe lângă mărimile respective intervin și anumite constante. Aceasta se datorește adeseori faptului că formula, este obținută printr-una sau mai multe integrări. Astfel de constante sunt determinate cu ajutorul unor condiții inițiale sau la limită. De exemplu dependența de timp a spațiului parcurs în cursul unei mișcări accelerate.

$$S = At^2 + Bt + C \quad \text{unde: } A = \frac{a}{2}, B = v_0, C = s_0,$$

a -fiind accelerația, v_0 -viteza inițială, s_0 -spațiul inițial, parcurs de mobil înainte de începerea măsurătorii și se obține prin integrarea expresiei:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a$$

Operația de alegere a unităților de măsură a condus la rezultatul că există un oarecare număr de mărimi, numite *mărimi fundamentale*, pentru care alegerea unităților se face prin convenție, pentru celelalte numite *mărimi derivate*, alegerea unităților făcându-se prin intermediul relațiilor de definiție. În această ultimă operație apare, uneori, un oarecare arbitrar, și anume coeficientul parazit.

Ansamblul alcătuit din unitățile mărimilor fundamentale și unitățile mărimilor derivate din acestea constituie un sistem coerent de unități. Se folosesc mai multe asemenea sisteme, care se deosebesc unul de altul fie prin natura mărimilor fundamentale, fie prin unitățile alese pentru astfel de mărimi, de exemplu:

-în tehnică se folosește sistemul MKfS, în care mărimile fundamentale sunt următoarele: lungimea cu metrul, forța cu kilogramul-forță și timpul cu secunda;

-cu ajutorul mărimilor fundamentale: lungime, masă și timp au fost definite sistemele: -CGS- centimetru, gram, secundă

-MKS- metru, kilogram, secundă

Ambele sisteme au fost stabilite inițial pentru a cuprinde, pe lângă mărimi geometrice, în special mărimile mecanice.

În domeniul științelor exacte, pe scară largă este adoptat sistemul internațional

de unități (SI) bazat pe următoarele mărimi fundamentale:

Mărime fundamentală	Unitate de măsură	Simbol
Lungime	metru	m
Masă	kilogram	kg
Timp	secundă	s
Intensitatea curentului electric	amper	A
Temperatură	kelvin	K
Intensitate luminoasă	candelă	cd

Metru a fost etalonat prin comparație cu lungimea de undă, în vid, a radiației emise de atomul izotopului cu numărul de masă 86 al kriptonului, în tranziția între nivelele $2p^{10}$ și $5d^5$ și este egal cu 1650763,73 lungimi de undă ale acestei radiații.

Kilogramul este definit ca masa prototipului, confecționat din platină, păstrat la Biroul Internațional de Măsură și Greutăți de la Sevres.

Secunda este durata a 919263131770 perioade ale radiației corespunzătoare tranziției între cele două nivele hiperfine ale stării fundamentale a atomului izotopului cu numărul de masă 133 al cesiului.

Amperul este intensitatea unui curent electric constant care, menținut în două conductoare paralele, rectilinii, cu lungime infinită și cu secțiune circulară neglijabilă, așezate în vid la o distanță de 1metru unul de altul, produce între aceste conductoare o forță egală cu $2 \cdot 10^{-7}$ N/m liniar.

Kelvinul, unitatea de temperatură termodinamică absolută, este fracțiunea $1/273,16$ din temperatura termodinamică a punctului triplu al apei. La a 13-a Conferință generală de măsură și greutăți s-a hotărât că unitatea kelvin (K) să se folosească și pentru a se exprima temperatura unui interval sau o diferență de temperatură. În afara temperaturii termodinamice absolute (T) exprimată în Kelvin se folosește și temperatura exprimată în scara Celsius cu simbolul "t" definită prin relația:

$$t = T - T_0 \quad \text{unde } T_0 = 273,15 \text{ K}$$

Un interval sau o diferență de temperatură pot fi exprimate atât în grade Celsius cât și în grade Kelvin.

Unitatea cantității de substanță și anume *molul*, a fost adoptată la cea de-a 14-a Conferință Internațională de Măsură și Greutăți din anul 1971.

1. Molul este cantitatea de substanță a unui sistem care conține atâtea entități elementare câți atomi există în 0,012 kg de carbon, izotopul ^{12}C . Masa de 0,012 kg de ^{12}C conține un număr de atomi egal cu numărul lui Avogadro ($N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$).
2. De câte ori se întrebuintează molul, entitățile elementare trebuie specificate, ele putând fi atomi, molecule, ioni, alte particule sau grupuri specificate de asemenea particule.

Candela este intensitatea luminoasă, într-o direcție dată a unei surse care emite o radiație monocromatică cu frecvența de 540×10^{12} hertzi și a cărei intensitate energetică, în această direcție, este $1/683$ dintr-un watt pe steradian.

CAP.II. MECANICA PUNCTULUI MATERIAL

II.1. Introducere.

Mecanica este o parte a fizicii care studiază schimbarea poziției corpurilor și condițiile în care un corp rămâne în repaus. Partea Mecanicii care studiază modul în care corpurile își schimbă poziția față de un reper, fără să se țină seama de interacțiunile (forțele) care intervin între corpuri, se numește Cinematică. Partea care studiază schimbările de poziție ale corpurilor ca urmare a acțiunii forțelor se numește Dinamică. Partea din Mecanică care se ocupă cu studiul condițiilor în care corpurile rămân în repaus se numește Statică. În sens mai larg, se consideră că Mecanica are în studiu și deformările corpurilor sub acțiunea forțelor.

În studiul mișcărilor mecanice, viteza este mărimea cea mai importantă, care face legătura spațio-temporală între elementele fundamentale ale mișcării: spațiul și timpul (distanțele și duratele).

În Mecanica clasică se studiază deplasările corpurilor cu o viteză mică (neglijabilă) în raport cu o viteză limită, care este viteza luminii în vid. Deplasările care se efectuează cu viteze apropiate de viteza luminii sunt studiate de Mecanica Relativistă.

În general, ca în toate capitolele Fizicii și în cadrul Mecanicii putem distinge o Mecanică experimentală care se ocupă cu studiul experimental al fenomenelor mecanice și o Mecanică teoretică care urmărește cuprinderea și explicarea acestora în cadrul unor teorii abstracte generale.

Studiul evoluției unui ansamblu mare de puncte materiale, fără să fie posibilă urmărirea fiecărui punct în parte, se face în Mecanica Statistică, bazată pe rezultatele Matematicii Statistice.

Pe lângă Mecanica Clasică și Mecanica Relativistă, ale cărei legi sunt valabile pentru dimensiuni și durate relativ mari, există Mecanica (respectiv Fizica) Cuantică, care studiază procesele ce se petrec în microcosm: procese ale căror legi sunt valabile pentru dimensiuni și durate oricât de mici, având deci ca obiect de studiu particule de dimensiuni moleculare, atomice și subatomice.

II.2. Cinematica punctului material

În cele ce urmează se vor evidenția principalele probleme privind cinematica punctului material. Prin punct material se înțelege un punct geometric care posedă masă și poate interacționa cu mediul înconjurător. Dar în studiile de cinematică nu interesează masa și interacțiunile.

Mișcarea, având loc în general în spațiul tridimensional, se raportează la un anumit punct considerat fix, numit referențial, care împreună cu axele de coordonate formează un sistem de referință. Față de reperul ales, poziția punctului material este determinată printr-un vector \vec{r} , cu originea în originea sistemului de referință și extremitatea în punctul material, numit vector de poziție.

Schimbarea poziției punctului material față de reperul ales, definită ca mișcare mecanică, este determinată atunci când se cunosc în fiecare moment coordonatele acestui punct. Aceasta înseamnă că vectorul de poziție este o funcție vectorială uniformă, derivabilă (cel puțin de două ori), dependentă de timp:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Această relație reprezintă legea de mișcare a punctului material. Proiectată pe axele unui sistem ortogonal care mai poate fi scrisă sub forma a trei funcții scalare de timp, numite ecuațiile scalare ale mișcării:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t), \\z &= z(t).\end{aligned}$$

Dacă se elimină timpul din aceste relații se obține traiectoria punctului material sau locul geometric al punctelor succesive prin care a trecut mobilul.

Când mișcarea punctului material este raportată la un punct de pe traiectorie, ecuația mișcării se poate scrie sub forma:

$$s = s(t) \quad - \text{relație care reprezintă legea mișcării.}$$

În figura alăturată este reprezentată lungimea porțiunii de traiectorie parcursă de mobil în timpul t .

Pentru a putea stabili ecuația de mișcare a punctului material se definește viteza punctului material ca fiind:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

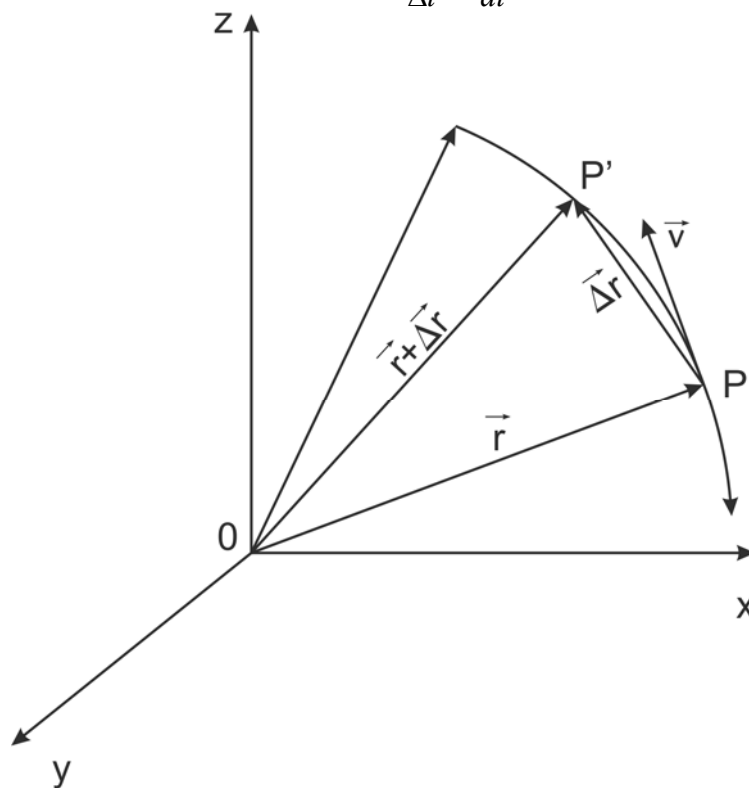


Fig.II.1.

Modulul vectorului viteză va fi dat de relația: $|\vec{v}| = v = \frac{ds}{dt}$

unde ds este elementul de lungime pe traiectoria mișcării (fig.II.1).
În cazul în care viteza este constantă, prin integrarea relației:

$$ds = v dt,$$

se obține ecuația mișcării pentru mișcarea uniformă:

$$s = s_0 + vt.$$

În cazul în care viteza mobilului nu rămâne constantă ca mărime și direcție (vectorul viteză nu este constant). În studiul mișcării se introduce o nouă mărime numită accelerație, definită prin relația:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}.$$

$\dot{\vec{v}}$ reprezintă derivata vitezei în raport cu timpul.

Vectorul viteză fiind tangent la traiectorie în fiecare punct, poate fi scris sub forma:

$$\vec{v} = v \vec{\tau}$$

unde $\vec{\tau}$ reprezintă versorul tangentei iar v modulul vitezei.

Ținând cont de definiția accelerației, prin derivare obținem:

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{\tau} + v \dot{\vec{\tau}}.$$

Fiindcă $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$

Putem scrie că $\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} \vec{n}.$

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{\tau} + v \frac{v}{R} \vec{n} = \dot{v} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}.$$

În relația de mai sus \dot{v} reprezintă componenta tangențială a accelerației (accelerația tangențială) care se datorește variației mărimii vitezei, iar $\frac{v^2}{R}$ reprezintă componenta normală a accelerației (accelerația normală) și se datorește variației direcției vitezei.

Cunoașterea accelerației permite obținerea, prin două integrări succesive a ecuației de mișcare $s = s(t)$.

În cazul când poziția punctului material în mișcare este dată prin coordonatele sale carteziane ca funcții de timp, vectorul de poziție $\vec{r}(t)$ are expresia:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

unde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: sunt versorii corespunzători axelor Ox, Oy și Oz . Viteza este:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}.$$

iar accelerația

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

Valoarea absolută a vitezei în coordonate carteziane respectiv în coordonate polare în plan este:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2},$$

iar valoarea absolută a accelerației

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})^2},$$

Compunerea vitezelor și accelerațiilor se face prin însumarea vectorială a componentelor lor.

II.3. Principiile dinamicii

Legile fundamentale sau principiile, care stau la baza studiului mișcării corpului ca rezultat al interacțiunilor cu mediul exterior, au primit o formulare științifică în celebra lucrare a lui Newton "Principiile matematice ale filozofiei naturale". Aceste principii sunt:

a) Principiul inerției: un punct material asupra căruia nu acționează nici o forță, rămâne în repaus sau se deplasează rectiliniu și uniform. În lucrările lui Newton, în loc de punct material se vorbea de un corp material, dar acesta desigur nu poate fi considerat decât ca un punct material, deoarece solidul rigid poate avea și o mișcare de rotație. De asemenea se precizează că o mișcare uniformă este o mișcare cu viteză constantă.

Dacă se introduce noțiunea de impuls (numit uneori, cantitate de mișcare), definit ca produsul dintre masa m a corpului (presupusă constantă) și viteza \vec{v} a acestuia, adică:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

atunci principiul inerției poate fi formulat astfel: în lipsa acțiunii oricărei forțe impulsul rămâne constant. Principiul inerției poate fi interpretat ca fiind legea conservării impulsului mecanic.

După cum se demonstrează în teoria relativității, masa unui corp în mișcare depinde de viteza cu care se deplasează corpul și este dată de relația:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

unde m_0 este masa de repaus, iar c viteza luminii în vid. Așadar legea inerției, în toate cazurile, se va scrie:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = cst.,$$

în absența oricărei forțe.

b) Principiul forței: forța careia i se datorește mișcarea unui corp este egală cu derivata impulsului acestuia în raport cu timpul:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}.$$

În cazul general prin \vec{F} se înțelege rezultanta tuturor forțelor care

acționează asupra corpului în mișcare.

În condițiile în care viteza mobilului este neglijabilă față de viteza luminii în vid, masa acestuia poate fi considerată constantă și deci relația care exprimă principiul forței (numit și legea variației impulsului) poate lua forma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Dacă poziția mobilului este dată în fiecare moment prin raza vectorială relativă la un reper fix, relațiile de mai sus sunt echivalente cu:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Dacă mișcarea este raportată la un sistem de axe carteziene ultima relație este echivalentă cu:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z$$

unde F_x , F_y și F_z sunt componentele forței pe direcțiile celor trei axe de coordonate. Aceste relații reprezintă ecuațiile dinamice ale mișcării punctului material.

Legea vectorială de mișcare $\vec{r} = \vec{r}(t)$ și legea naturală de mișcare $s = s(t)$ se obțin prin integrarea ecuațiilor dinamice ale mișcării punctului material. Constantele ce apar la integrarea acestor ecuații diferențiale se determină din condițiile inițiale, poziția inițială și viteza inițială,

c) Principiul egalității acțiunilor reciproce: în urma fiecărei acțiuni apare ca răspuns o forță egală și de sens contrar numită reacțiune. Reacțiunea este totdeauna contrară ca și sens dar egală în modul cu acțiunea. Conform acestei legi forțele apar totdeauna numai perechi. Existența concomitentă a acțiunii și a reacțiunii este confirmată de practică prin faptul că într-o serie de interacțiuni dintre două corpuri este vizibil efectul reacțiunii nu cel al acțiunii.

d) Principiul independenței acțiunii forțelor: La cele trei principii ale lui Newton, în studiul mișcărilor, se mai adaugă principiul independenței acțiunii forțelor sau legea superpoziției forțelor. Conform acestei legi fiecare dintre forțele la care este supus un punct material, acționează independent de existența celorlalte forțe aplicate punctului. Aceasta înseamnă că forțele aplicate asupra punctului material își suprapun acțiunile. Mișcarea este aceeași ca și când asupra punctului material ar acționa o singură forță rezultantă, obținută prin însumarea vectorială a tuturor forțelor aplicate punctului.

Principiile lui Newton sunt legi generale cu caracter axiomatic, care nu se pot demonstra. Ele reprezintă generalizarea și abstractizarea experienței și cunoașterii umane referitoare la mișcare ca rezultat al interacțiunilor dintre corpuri. Aceste legi n-au putut fi infirmate prin nici o experiență.

Referitor la principiile dinamicii mai trebuie arătat că acestea sunt satisfăcute numai în condițiile unor sisteme de referință inerțiale (care sunt în repaus sau în mișcare rectilinie și uniformă față de sistemul în care corpul studiat se află în repaus, numit sistem propriu).

Conform principiilor lui Newton un eveniment se petrece simultan în toate sistemele inerțiale; de asemenea distanța spațială are aceeași valoare în toate sistemele inerțiale în care este măsurată.

II.4. Lucru mecanic. Energia mecanică.

Se știe că în toate activitățile fizice apar două elemente comune și anume acțiunea unei forțe și deplasarea. Ca măsură a activităților practice s-a introdus noțiunea de lucru mecanic.

Prin definiție, lucrul mecanic elementar efectuat de către o forță constantă \vec{F} când punctul său de aplicație parcurge arcul de traiectorie $d\vec{s}$ este mărimea fizică dată de produsul scalar:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cos \alpha$$

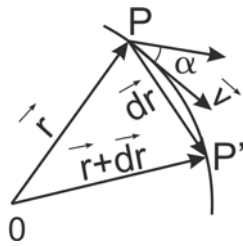


fig.II.2.

Din figura II.2 se poate vedea că, dacă mișcarea este raportată la referențialul **O** și este dată prin evoluția în timp a vectorului de poziție $\vec{r}(t)$, lucrul mecanic poate fi scris și sub forma:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$d\vec{r}$ fiind diferența vectorilor de poziție \vec{r} și $\vec{r} + d\vec{r}$ ai punctelor P respectiv P', prin care a trecut mobilul la momentele t respectiv t+dt.

Ținând cont de legea a II-a a lui Newton lucrul mecanic elementar se poate scrie:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} dt$$

căci $d\vec{r} = \dot{\vec{r}} dt$.

Se observă că ultimul termen este o diferențială totală exactă și deci:

$$dL = d\left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2\right) = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right).$$

Mărimea din paranteză, notată prin E_c (sau T)

$$T = E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Este energia cinetică a mobilului câștigată sub acțiunea forței \vec{F} . Așadar avem:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dE_c,$$

Relație care exprimă faptul că lucrul elementar al forței care acționează asupra unui mobil este egal cu diferențiala energiei cinetice a acestuia. Sub formă finită ecuația de mai sus se scrie:

$$E_{c_2} - E_{c_1} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = L$$

și exprimă faptul că variația energiei cinetice în deplasarea mobilului de la punctul 1 la punctul 2 este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța care cauzează această deplasare.

Se observă că derivata energiei cinetice în raport cu viteza dă valoarea impulsului:

$$\frac{dE_c}{dv} = \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = mv = p$$

În cazul în care avem de-a face cu mișcarea unui punct material într-un câmp de forțe care derivă dintr-un potențial adică pentru care avem:

$$\vec{F} = -\text{grad}U = -\nabla U = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) U,$$

Expresia lucrului mecanic elementar devine:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right),$$

Deci:

$$dL = dU.$$

În acest caz lucrul mecanic efectuat de forța \vec{F} care își deplasează punctul de aplicație din P_1 într-un punct P_2 este:

$$L = \int_1^2 dL = U_{(P_2)} - U_{(P_1)}$$

Dacă U este o funcție univocă, valoarea lucrului mecanic efectuat pentru a ajunge din P_1 în P_2 nu depinde de drumul urmat între cele două puncte, iar valoarea integralei în lungul unui circuit închis este nulă:

$$L = \oint dU = 0$$

Când funcția U este independentă de timp și este o funcție univocă de coordonate, ea reprezintă o funcție de punct E_p , numită energie potențială a mobilului. Un câmp de forță caracterizat printr-o astfel de funcție se numește câmp conservativ sau câmp potențial.

În cazul unei deplasări elementare într-un câmp conservativ pe baza celor arătate mai sus avem:

$$dE_c = dL = -dE_p$$

sau

$$dE_c + dE_p = d(E_c + E_p) = 0$$

de unde prin integrare rezultă: $E_c + E_p = E = \text{const}$

Așadar energia cinetică și cea potențială a unui mobil aflat într-un câmp potențial se transformă una într-alta astfel încât suma lor la un moment dat rămâne constantă dacă asupra mobilului nu acționează alte forțe exterioare câmpului.

Într-un câmp de forțe conservativ se definesc suprafețele locului geometric pentru care $U = \text{const}$. Acestea sunt numite suprafețe echipotențiale ale câmpului. Din definiția lor rezultă că prin fiecare punct al câmpului trece o singură suprafață echipotențială și că la deplasarea unui punct material pe o asemenea suprafață nu se efectuează lucru mecanic.

Într-un câmp de forțe pot fi trasate, prin fiecare punct, curbe tangente la vectorul forță. Acestea trec prin punctele de aplicație ale forțelor și se numesc linii de forță sau linii de câmp. Rezultă că liniile de câmp sunt ortogonale la suprafețele echipotențiale. Aceste proprietăți sunt cuprinse în relația $\vec{F} = -\text{grad}U$. Într-adevăr, la orice deplasări ale mobilului pe aceeași suprafață echipotențială lucrul mecanic fiind nul, trebuie ca cei doi vectori, forță și deplasare, să fie perpendiculari. Din legea conservării energiei mecanice, ținând cont că energia cinetică este o mărime pozitivă sau nulă, rezultă că energia potențială este $E_p \leq E$.

E fiind energia totală. Această condiție delimitează acele regiuni din spațiu în care este posibilă mișcarea punctului material. De exemplu dacă energia potențială variază ca în figura II.3 rezultă că în punctele A, B, C, energia cinetică este nulă deoarece $v=0$ iar x_A, x_B, x_C sunt puncte de întoarcere.

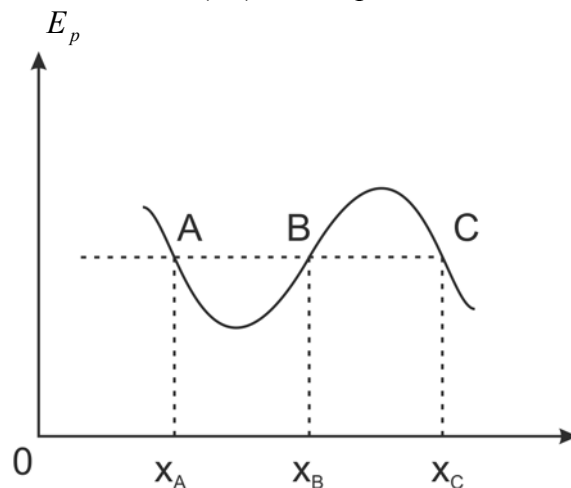


fig.II.3.

Condiția $E_p \leq E$ este satisfăcută numai în regiunea AB, singura deci în care mișcarea este posibilă. Această regiune constituie o groapă de potențial și este mărginită de domenii în care mișcarea nu este posibilă, numite bariere de potențial. Trecerea unui mobil printr-o asemenea barieră nu este posibilă din punct de vedere al mecanicii clasice fără modificarea energiei totale.

Un câmp de forțe care nu derivă dintr-un potențial U se numește turbionar. Condiția ca un câmp să nu fie turbionar se deduce din definiția câmpului potențial $\vec{F} = -gradU$, adică:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Derivatele parțiale:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \text{ și } \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

vor fi egale deoarece ordinea de derivare poate fi intervertită.

Deci:
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$$

și în mod analog:
$$\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$$

Diferențele derivatelor parțiale din membrul întâi al acestor relații sunt componentele unui vector numit rotaționalul lui \vec{F} . Deci condiția ca un câmp să fie potențial mai poate fi scrisă, ca:

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = 0$$

Faptul că rotorul câmpului potențial este nul înseamnă că liniile de forță ale unui astfel de câmp sunt curbe deschise.

II.5. Momentul cinetic

Dacă o forță acționează asupra unui corp care are un punct fix îi produce acestuia o rotație până când direcția forței trece prin punctul fix. Ca măsură a efectului de rotație se definește momentul forței în raport cu punctul fix.

Dacă \vec{F} este forța care acționează asupra mobilului în punctul P (fig.II.4) momentul forței în raport cu punctul 0 este mărimea: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

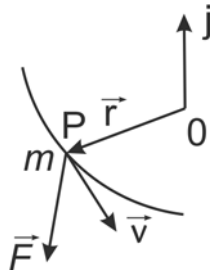


fig.II.4.

Pentru un punct material în mișcare față de un punct fix, considerat reper, se definește un moment al impulsului, numit moment cinetic

$$\vec{j} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Momentul cinetic \vec{j} este un vector perpendicular pe planul determinat de \vec{r}, \vec{v} , având originea în punctul fix.

Se demonstrează că viteza de variație a momentului cinetic este egală cu momentul forței care determină mișcarea mobilului.

Într-adevăr

$$\dot{\vec{j}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

Având în vedere că vectorii $\dot{\vec{r}} = \vec{v} \times \vec{p} = m\vec{v}$ au aceeași direcție, produsul lor vectorial este nul, iar din ultima relație rămâne.

$$\dot{\vec{j}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

După cum se vede din ultima relație, atunci când asupra mobilului nu acționează nici o forță sau acționează o forță centrală (al cărei moment față de centrul de rotație este nul) momentul cinetic rămâne constant. Într-adevăr, deoarece $\dot{\vec{j}} = 0$

$$\vec{j} = \int d\vec{j} = \text{const}$$

Adică, în aceste condiții momentul cinetic se conservă.

Cazuri particulare:

Mișcarea unui punct material într-un anumit câmp de forță depinde de structura acestui câmp și se studiază fie cu ajutorul legilor lui Newton, fie folosind principiul conservării energiei. Dintre cazurile particulare ale mișcării punctului material în diferite câmpuri aici prezentăm următoarele:

a) Mișcarea într-un câmp uniform. În acest caz în orice punct al câmpului forțele au aceeași valoare, direcție și sens. Câmpul gravitațional într-o regiune nu prea mare, câmpul forțelor arhimedice într-un vas conținând un lichid omogen, câmpul forțelor electrostatice dintre armăturile unui condensator plan pot fi considerate astfel de câmpuri. În câmpurile uniforme suprafețele

echipotențiale sunt plane, iar liniile de forță sunt drepte paralele.

Considerând ca exemplu cazul câmpului gravitațional dacă alegem ca axă Oz direcția greutății ($F_x = F_y = 0$, $F_z = G = mg$), funcția de forță (energia potențială) va satisface relația:

$$G = F_z = -\frac{dU}{dz},$$

de unde $dU = -Gdz$

iar $U = -\int Gdz = -Gz + C$

Când $z=0$ și $C=0$ avem : $U=-mgz$

Deci energia potențială a unui corp crește proporțional cu înălțimea (cota) față de nivelul considerat zero.

Ecuția dinamică a mișcării într-un câmp în care forța \vec{F} este constantă va fi:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

sau $d\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}dt,$

de unde prin integrare

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}t + \vec{v}_0$$

iar printr-o nouă integrare se obține: $\vec{r} = \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{m} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$

Relațiile de mai sus reprezintă ecuația vitezei și spațiului în mișcarea uniform accelerată.

Un caz interesant îl constituie aruncările în câmp constant. Pentru simplificarea studiului se alege sistemul de referință astfel că la momentul $t_0 = 0$ $\vec{r}_0 = 0$, iar viteza \vec{v}_0 de aruncare imprimată punctului material și forța \vec{F} să fie coplanare. Dacă se alege $O_y \parallel \vec{F}$ (fig.II.5) ecuațiile scalare ale mișcării sunt

$$x = v_0 t \cos \alpha,$$

$$y = -\frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + v_0 t \sin \alpha$$

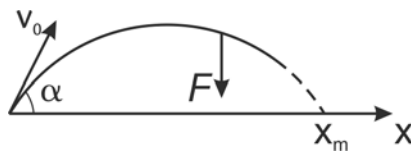


fig.II.5.

Eliminând timpul se obține ecuația traiectoriei în coordonate carteziene, de forma unei parabole

$$y = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha$$

unde am notat $F/m = g$.

Făcând pe $y = 0$ se obține distanța maximă pe orizontală (bătaia) la care ajunge corpul aruncat

$$x_m = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Se poate observa că pentru corpuri aruncate cu aceeași viteză v_0 , x_m este maxim când unghiul α , pe care-l face direcția vitezei de aruncare cu orizontala, satisface condiția: $\sin 2\alpha = 1$, adică $\alpha = 45^\circ$.

Înălțimea maximă (săgeata traiectoriei) la care se urcă corpul se obține pentru o abscisă egală cu jumătatea bătaii, adică pentru

$$x_m = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha .$$

Ordonata devine

$$y_{\max} = -\frac{g}{2v_0^2} \frac{v_0^4 \cos^4 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^{2\alpha}}{g} ,$$

iar după restrângere se obține:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha .$$

Formulele rezultate sunt valabile în cazul aruncării în vid. În caz real, la aruncarea în aer, datorită rezistenței pe care o întâmpină mobilul, traiectoria devine o curbă balistică având forma unei parabole cu ramura coborâtoare mai puțin întinsă.

În cazul mișcării într-un câmp de forțe uniform dintr-un mediu fluid experiența arată că rezistența opusă de mediu este funcție de viteza mobilului. Există două cazuri particulare:

1° Rezistența este proporțională cu viteza. Considerăm ca exemplu căderea unei bile într-un mediu vâscos în care rezistența $R = 6\pi r\eta v$ este dată de legea lui Stokes. Ecuația dinamică a unei astfel de căderi este:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - k_1 v .$$

Integrând, pentru condițiile inițiale $t = 0$ și $v = 0$, se obține expresia vitezei :

$$v = \frac{mg}{k_1} \left(1 - e^{-\frac{k_1}{m} t} \right)$$

de unde se vede că după un timp lung viteza tinde către o valoare limită

$$v_{\max} = \frac{mg}{k_1},$$

atinsă atunci când forța de rezistență k_1v , este egală și de sens contrar cu mg (echilibru dinamic)

2°. Rezistența este proporțională cu viteza la pătrat ($R=k_2v^2$). Asemenea rezistențe se întâlnesc la mișcarea cu viteze mari a unui corp în aer. Ecuația dinamică a unei asemenea mișcări va fi:

$$m \frac{dv}{dt} = F - k_2v^2$$

unde F este forța constantă de tracțiune.

Integrând avem

$$\frac{1}{2\sqrt{F}} \ln \frac{\sqrt{F + \sqrt{k_2}v^2}}{\sqrt{F - \sqrt{k_2}v^2}} = \sqrt{k_1}t + c.$$

Dacă la momentul $t = 0$, $v = 0$, rezultă $C = 0$ și expresia vitezei este

$$v = \sqrt{\frac{F}{k_2}} \frac{e^{\sqrt{k_2}Ft} - e^{-\sqrt{k_2}Ft}}{e^{\sqrt{k_2}Ft} + e^{-\sqrt{k_2}Ft}} = \sqrt{\frac{F}{k_2}} \operatorname{th} \sqrt{k_2}Ft,$$

care arată că viteza tinde și în acest caz către o valoare limită

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{F}{k_2}}$$

Când $t \rightarrow \infty$. Distanța la care se atinge v_{\max} este finită, fiind vorba și aici de un echilibru dinamic.

b) Mișcarea într-un câmp de forțe elastice. Forțele elastice apar ca rezultat al schimbării poziției de echilibru al particulelor ce formează un corp solid. Mărimea forțelor elastice este proporțională cu deplasarea \vec{r} a punctelor față de poziția lor de echilibru.

Se cunoaște faptul că forța care apare la deformarea elastică a unui corp este dată de legea lui Hooke:

$$\vec{F} = -k\vec{r} \quad k \text{ fiind constanta elastică a materialului.}$$

Mișcarea punctului material sub acțiunea unei forțe elastice efectuându-se în lungul unei axe, să zicem Ox , ecuația dinamică a mișcării este:

$$m\ddot{x} = -kx$$

Integrând această ecuație diferențială obținem:

$$x = A \sin((\omega t + \varphi))$$

unde A și φ sunt două constante de integrare a căror valoare depinde de condițiile inițiale. După cum se vede, ecuația cinematică a mișcării este o oscilație, x fiind elongația, iar $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsația mișcării. Mărimea unghiulară $\omega t + \varphi$ este faza oscilației la momentul t , φ este faza inițială, iar A amplitudinea (elongația maximă).

Viteza punctului material în mișcarea oscilatorie este:

$$v = \dot{x} = A\omega \cos^*(\omega t + \varphi)$$

iar accelerația:

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x.$$

Forțele elastice fiind de forma:

$$F = -kx = -m\omega^2 x,$$

se observă ușor că ele derivă dintr-un potențial

$$F = -kx = -\frac{dU}{dx}$$

de unde

$$U = \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{k}{2} x^2$$

Deci energia potențială într-un corp elastic deformat este:

$$Ep = U = \frac{k}{2} x^2$$

În cazul unei oscilații elastice libere energia totală este egală cu energia cinetică maximă (corespunzătoare momentului trecerii oscilatorului prin poziția de echilibru):

$$E = Ec_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

Această valoare coincide cu maximul energiei potențiale:

$$U_{\max} = \frac{k}{2} A^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

Dacă punctul material pus în mișcare se află sub acțiunea a două forțe de aceeași constantă elastică traiectoria nu va mai fi, în general, o dreaptă. În cazul a două

forțe elastice perpendiculare

$$\vec{F}_x = -m\omega^2 x\vec{i} \text{ și } \vec{F}_y = -m\omega^2 y\vec{j},$$

vom avea mișcările oscilatorii:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_1) \text{ și } y = B\sin(\omega t + \varphi_2)$$

Mișcarea rezultantă a punctului material poate fi considerată ca o mișcare compusă din cele două oscilații. Eliminând timpul din ecuațiile oscilațiilor componente se obține traiectoria punctului

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi$$

unde $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ reprezintă defazajul între fazele oscilațiilor componente.

După cum se poate observa, mișcarea rezultată din compunerea a două mișcări oscilatorii armonice de aceeași pulsație are ca traiectorie în general o elipsă. În funcție de valoarea lui $\Delta\varphi$ aceasta poate degenera într-o dreaptă

($\Delta\varphi = 0$ sau $\Delta\varphi = \pi$) sau într-un cerc ($\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ sau $A=B$).

În cazul compunerii a două oscilații armonice paralele de frecvențe diferite

$$x_1 = a_1 \sin 2\pi\nu_1 t \text{ și } x_2 = a_2 \sin 2\pi\nu_2 t$$

Amplitudinea mișcării rezultante va fi variabilă în timp:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos 2\pi(\nu_1 - \nu_2)t.$$

Pentru $2\pi(\nu_1 - \nu_2)t = 2k\pi$ amplitudinea are valoarea maximă $A = a_1 + a_2$, iar pentru $2\pi(\nu_1 - \nu_2)t = (2k+1)\pi$ amplitudinea este minimă, $A = a_1 - a_2$.

Notând cu θ timpul dintre două maxime consecutive oarecare avem:

$$2\pi(\nu_1 - \nu_2)t \text{ și } 2\pi(\nu_1 - \nu_2)(t + \theta) = 2(k+1)\pi$$

Scăzând obținem:

$$\theta = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2}.$$

În mod analog se obține același timp între două minime consecutive. Această apariție a maximelor și minimelor prin compunerea a două vibrații constituie fenomenul de bătaie. Frecvența bătailor este:

$$\nu_{12} = \nu_1 - \nu_2.$$

chiar diferența frecvențelor vibrațiilor componente.

Fenomenul de bătaie este foarte ușor de realizat și observat în cazul vibrațiilor sonore a două diapazoane identice, care vibrează simultan, dacă unuia i se atașează o agrafă de un braț (schimbând puțin prin aceasta frecvența proprie de vibrație).

II.6. Gravitația

Kepler, studiind mișcarea planetelor pe baza datelor furnizate de observațiile astronomice, a stabilit că mișcarea lor în sistemul heliocentric este guvernată de următoarele trei legi generale:

1. Planetele descriu traiectorii eliptice, Soarele aflându-se în unul din focare.

2. Suprafețele măturate de razele vectoriale sunt proporționale cu timpul (viteza areolară este constantă).

3. Pătratul perioadelor de revoluție este proporțional cu cubul axelor mari ale elipselor descrise $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$

Newton, căutând motivația legilor lui Kepler, a descoperit legea atracției universale. El a considerat că forțele de interacțiune dintre aștri sunt de aceeași natură cu forța care atrage corpurile spre centrul Pământului. Deducând și verificând legea de interacțiune dintre doi aștri, Newton a extins această lege asupra tuturor corpurilor din univers. Această lege are următorul enunț: două corpuri (aștri) se atrag cu o forță direct proporțională cu produsul maselor lor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre centrele lor. Adică:

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

unde factorul de proporționalitate k este constanta gravitației universale.

Forțele gravitaționale sunt forțe centrale care se manifestă în jurul fiecărui corp, formând câmpuri gravitaționale. Natura gravitației nu este elucidată. Einstein a presupus existența undelor gravitaționale care s-ar propaga cu viteza luminii, dar încercările de detectare ale acestora au eșuat.

Câmpurile gravitaționale sunt câmpuri potențiale. Pentru câmpul unui astru (corp) de masă M se poate scrie:

$$dU = -F \cdot dr = -k \frac{Mm}{r^2} dr,$$

iar
$$U = k \frac{Mm}{r}$$

unde $r = r_0 + h$ este suma dintre raza r_0 a astrului și altitudinea h a punctului în care calculăm potențialul.

Să urmărim în continuare deducerea legii atracției universale. Pentru aceasta pornim de la expresia accelerației

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{\tau} + \frac{v^2}{r} \vec{n}$$

Pentru simplificare să presupunem că mișcarea are loc pe o traiectorie circulară (elipsă cu axele egale). În aceste condiții legea ariilor impune $\dot{v} = 0$ și deci $a = \frac{v^2}{r}$ forța centrifugă a Planetei este:

$$F = m\omega^2 r = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} \frac{m}{r^2} = \mu \frac{m}{r^2}$$

unde $\mu = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$ este o constantă deoarece raportul $\frac{r^3}{T^2}$ are aceeași valoare pentru orice planetă, conform legii a treia a lui Kepler. Această forță este egală cu forța cu care Soarele este atras de planetă

$$F = \mu' \frac{M}{r^2}$$

unde M mare este masa Soarelui și μ' o constantă. Din egalarea celor două forțe rezultă: $\mu \frac{m}{r^2} = \mu' \frac{M}{r^2}$ deunde $\frac{\mu}{M} = \frac{\mu'}{m} = k$

deci $\mu = km$ și $\mu' = km$, care introduse în expresiile forțelor dau

$$F = k \frac{Mm}{r^2}$$

Aceasta reprezintă expresia forței de atracție dintre Soare și o planetă ce se rotește în jurul său. Ea a fost extinsă la toate corpuri din Univers, cu condiția ca distanța dintre centrele de masă ale celor două corpuri să fie mult mai mare față de dimensiunile lor. Constanta gravitației universale k reprezintă forța cu care se atrag două corpuri cu masa de 1 kg aflate la distanță de 1 m. Dimensiunile lui k rezultă din relația:

$$k = \frac{F \cdot r^2}{m_1 m_2}; \quad k = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2} = M^{-1}L^3T^{-2}$$

Valoarea constantei gravitaționale universale este $k = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, și a fost determinată experimental de către Cavendish. Dispozitivul folosit pentru aceasta a constat dintr-o balanță de torsiune de construcția speciala (fig.II.6).

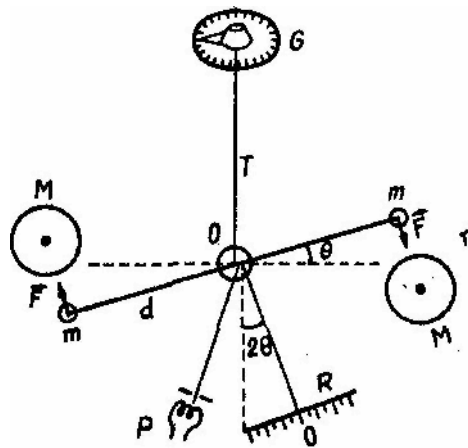


Fig. II.6

Din firul de torsiune T este suspendată orizontal o bară foarte ușoară având la capete câte o masă m de plumb. Două sfere mari de plumb, având fiecare masa M , sunt așezate în fața sferelor mici. Cuplul forțelor de atracție dintre m și M va fi:

$$F \cdot 2d = 2dk \frac{Mm}{r^2}$$

unde r este distanța dintre centrele sferelor, iar d jumătatea barei.

Pentru a determina valoarea lui k se măsoară valoarea cuplului prin momentul de răsucire a firului de suspensie. Pentru aceasta cu goniometrul G se măsoară unghiul θ cu care trebuie răsucit firul pentru a readuce bara în poziția inițială. Această poziție se reperează cu ajutorul unui fascicul luminos, provenit de la un proiector P , reflectat de o oglindă O solidară cu bara pe o rigla gradată R . Prin readucerea spotului în poziția inițială momentul forțelor gravitaționale este compensat de momentul de torsiune al firului:

$$D = 2dk \frac{Mm}{r^2}$$

Unde D este constanta de torsiune a firului, care se determină din expresia perioadei pendulului de torsiune, $T = 2\pi\sqrt{J/D}$,

- J fiind momentul de inerție al echipajului mobil.

S-a obținut o precizie mare lucrând în vid, cu un fir de torsiune din cuarț.

Odată determinată constanta gravitației universale k , se poate determina masa Pământului. Într-adevăr, forța de atracție dintre Pământ și un corp oarecare de masă m poate fi scrisă astfel:

$$k \frac{Mm}{R^2} = mg$$

de unde masa pământului M este

$$M = \frac{gR^2}{k} = \frac{9,8(6400 \cdot 10^3)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Ca urmare, experiența lui Cavendish a fost numită pe bune dreptate, "Cântărirea Pământului".

Considerând Pământul ca o sferă omogenă de rază $R \approx 6400$ km, se obține densitatea medie a Pământului :

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{4,3,14(6400 \cdot 10^3)^3} \approx 550 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

cunoscând că densitatea medie a scoarței este în jur de 2000 kg/m^3 urmează că densitatea în interiorul Pământului este mult mai mare.

Variația greutății cu altitudinea și latitudinea. Legea a doua a lui Newton definește greutatea unui corp de masă m în câmpul gravitațional prin relația $G=mg$, unde accelerația gravitațională g reprezintă intensitatea câmpului în punctul în care se află corpul.

Variația accelerației gravitaționale cu altitudinea rezultă din identificarea interacțiunii dintre pământ și un corp oarecare dată pe de o parte de legea a II a dinamicii și pe de alta de legea gravitației universale.

$$mg_h = k \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

unde g_h este accelerația gravitațională la altitudinea h ; valoarea ei va fi:

$$g_h = k \frac{M}{(R+h)^2} = g_0 \left(\frac{1}{1 + 2\frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2}} \right),$$

iar în cazul unor altitudini mici ($h \ll R$ și $h^2/R^2 \rightarrow 0$)

$$g_h = g_0 \frac{1}{1 + 2\frac{h}{R}} = g_0 \frac{1 - 2\frac{h}{R}}{1 - 4\frac{h^2}{R^2}} \approx g_0 \left(1 - 2\frac{h}{R} \right),$$

g_0 fiind accelerația gravitațională la altitudinea zero.

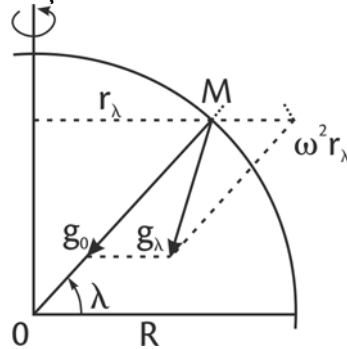


Fig.II.7.

Accelerația gravitațională se modifică și cu latitudinea datorită compunerii cu accelerația centrifugă $\omega^2 r_\lambda$, ce apare ca rezultat al rotației pământului. Într-adevăr considerând $\omega^2 r_\lambda$, mult mai mic ca g_0 , valoarea accelerației gravitaționale g_λ se poate aproxima destul de bine prin relația

$$g_\lambda = g_0 - \omega^2 r_\lambda \cos \lambda = g_0 - \omega^2 R \cos^2 \lambda$$

unde $r_\lambda = R \cos \lambda$.

La ecuator ($\lambda=0$) accelerația gravitațională va fi:

$$g_0 = g - \omega^2 R = g - \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

În cazul în care perioada de rotație a pământului în jurul axei sale ar fi de 17 ori mai mică, corpurile de la ecuator ar pluti, putând părăsi Pământul. Datorită turtirii Pământului și faptului că la poli ($\lambda = \frac{\pi}{2}$) termenul $\omega^2 r \cos^2 \lambda$ este nul,

accelerația gravitațională la poli este mai mare ca la ecuator.

Valoarea accelerației gravitaționale determinată experimental este: 9,83m/s² la poli, 9,78m/s² la ecuator și 9,805m/s² la București.

Vitezele cosmice. Prima viteză cosmică este viteza minimă necesară unui mobil

pentru a se roti în jurul Pământului. Considerând un corp de masă m care este aruncat orizontal la o altitudine mică cu o asemenea viteză, va trebui ca forța centrifugă de inerție să echilibreze greutatea. Adică

$$\frac{mv_{01}^2}{r} = mg \text{ de unde rezultă: } v_{01} = \sqrt{rg}$$

În aceste condiții corpul se rotește în jurul Pământului, devenind satelit

artificial al acestuia. Considerând $r=R+h=6400\text{km}$ și $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ se obține:

$$v_{01} = \sqrt{6400 \cdot 10^3 \cdot 9,8} = 7900 \text{ m/s}.$$

Dacă satelitul este lansat la o altitudine h relativ mare, atunci viteza v_1 va satisface relația

$$\frac{mv_1^2}{R+h} = k \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

de unde

$$v_1 = \sqrt{k \frac{M}{R+h}} = \sqrt{k \frac{M}{R}} \sqrt{\frac{R}{R+h}} = v_{01} \sqrt{\frac{R}{R+h}}.$$

Din cazul unor sateliți staționari, folosiți în televiziune, care trebuie să fie situați mereu de asupra aceluiași punct de pe glob, perioada lor trebuind să fie de $T=24$ ore, viteza mai satisface și relația:

$$v_1 T = 2\pi(R+h).$$

Din aceste relații rezultă condițiile de viteză și altitudine pentru un asemenea satelit. Dacă viteza tangențială de lansare a sateliților este mai mare ca prima viteză cosmică, traiectoriile descrise de aceștia vor fi eliptice. În cazul în care viteza de lansare depășește o anumită limită v_{02} , mobilul iese din sfera de atracție a Pământului și intră în sfera de atracție a altor planete, a Lunii și mai ales în a Soarelui.

Pentru a calcula viteza v_{02} numită a doua viteză cosmică, considerăm că energia cinetică imprimată la lansare este suficientă pentru ca mobilul să se deplaseze la infinit față de Pământ. Așadar energia cinetică se va transforma integral în energie potențială, în câmpul gravitațional al Pământului, când corpul lansat cu viteza v_{02} va fi suficient de departe de Pământ. Adică

$$\frac{mv_{02}^2}{2} = -\int_R^\infty k \frac{Mm}{r^2} dr = kmM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty} \right) = k \frac{mM}{R}$$

de aici rezultă :

$$v_{02} = \sqrt{2 \frac{kM}{R}} = v_{01} \sqrt{2} = 7,9\sqrt{2} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Viteza v_{03} pe care trebuie să o aibă un corp pentru ca pornind de pe Pământ să se elibereze de atracția Soarelui (să părăsească sistemul solar) se numește a treia viteză cosmică. Calcule analoge celor de sus dau pentru această viteză valoarea

$$v_{03} = 16,7 \text{ km/s}.$$

Ecuția lui Mescerski pentru mișcarea rachetei este ecuația vitezei unui corp de masă variabilă. Masa unei rachete ale cărei motoare sânt în funcțiune este o funcție de timp datorită pierderii de masă prin arderea rezervei de combustibil. Dacă viteza de ejecție a gazelor care se formează prin arderea

combustibilului este \bar{w} (în raport cu corpul rachetei), iar viteza rachetei este \bar{v} , ecuația diferențială (dinamică) a mișcării este:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{d}{dt}(m_0 - m)\bar{w} = \bar{P}_e$$

unde m_0 este la masa de pornire. Întrucât \bar{w} este constant

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P}_e + \bar{w} \frac{dm}{dt}$$

Unde $m=m(t)$ este masa la momentul t iar \bar{P}_e suma tuturor forțelor exterioare.

Mărimea $\bar{R} = \bar{w} \frac{dm}{dt}$ reprezintă forța de reacție îndreptată în sens contrar cu

\bar{w} (întrucât $\frac{dm}{dt} < 0$).

În absența forțelor exterioare (gravitație, frecări etc.) putem scrie:

$$d\bar{v} = \bar{w} \frac{\dot{m}}{m} dt$$

de unde

$$\bar{v} = \bar{w} \int_0^t \frac{\dot{m}}{m} dt = \bar{w} \ln m \Big|_0^t$$

și deci

$$\bar{v}(t) = -\bar{w} \ln \frac{m_0}{m(t)}.$$

Dacă racheta este cu mai multe trepte, atunci viteza în timpul funcționării unei trepte oarecare este:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{w} \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

unde v_0 este viteza la începutul funcționării motoarelor treptei respective, iar m_0 masa în acel moment

Ecuația lui Mescerski, dată de ultima relație, stă la baza studiului mișcării rachetei. Se observă că este mult mai avantajos să se mărească viteza de ejecție a gazelor decât raportul maselor.

Cap. III. OSCILAȚII ȘI UNDE

III.1. Caracteristici generale

Un punct material care aparține unui mediu între particulele căruia se exercită forțe elastice execută o mișcare oscilatorie dacă este scos din poziția de echilibru. Această mișcare este transmisă din aproape în aproape și celorlalte particule ale mediului, datorită forțelor de interacțiune dintre ele. Procesul de propagare a unei oscilații în mediul ambiant se numește undă. Unda este un fenomen periodic, iar din punct de vedere energetic are aceleași caracteristici ca și oscilația, energia undei putând rămâne constantă sau nu, prin procese parțial reversibile sau ireversibile. Întrucât un punct care oscilează posedă o energie totală (cinetică și potențială), conform relației:

$$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = 2\pi^2 m \nu^2 A^2$$

Dacă în cursul propagării oscilațiilor într-un mediu energia lor mecanică se transformă în căldură sau în alte forme de energie se spune că mediul este absorbant. Dacă energia de oscilație a sursei își păstrează mărimea în timpul propagării undelor, mediul se numește transparent pentru oscilațiile respective.

Forma și mecanismul de propagare a unei mișcări oscilatorii se numește undă. Unda este un fenomen variabil în timp care se propagă din aproape în aproape.

Locul geometric al punctelor celor mai îndepărtate de sursă atinse la un moment dat de mișcarea oscilatorie se numește **front de undă**.

Dacă se consideră un centru oscilator (o sursă) punctiform într-un mediu elastic tridimensional, infinit, omogen și izotrop, undele se vor propaga în toate direcțiile la fel, frontul de undă fiind o sferă. Viteza în lungul razei, a frontului de undă este viteza de propagare sau **viteza de fază**.

Se numește **lungime de undă** distanța parcursă de oscilație în timp de o perioadă. Dacă notăm cu λ -lungimea de undă, cu v -viteza de propagare cu T și ν -perioada respectiv frecvența oscilației atunci avem:

$$\lambda = \nu T = \frac{v}{\nu}$$

Cel mai simplu caz particular al unei unde periodice este **unda armonică plană** care pune fiecare particulă într-o mișcare armonică simplă. Ecuația unei astfel de unde va fi dată de relația:

$$\psi = A \sin \omega t$$

La o distanță x de sursă, elongația unui punct M va fi:

$$\psi = A \sin \omega(t - t') = A \sin \omega(t - \frac{x}{v}) = A \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

Tipuri de unde

Tipul undelor depinde de starea de agregare a mediului prin care se propagă. Deasemenea putem distinge mai multe tipuri de unde, considerând modul în care mișcările particulelor de substanță sunt corelate cu direcția de propagare a undelor. Dacă mișcările particulelor materiale care transmit unda sunt perpendiculare pe direcția de propagare a undei avem o undă transversală. De exemplu, când o coardă verticală sub tensiune este pusă să oscileze înainte și înapoi, de-a lungul corzii se va propaga o undă transversală. Ecuația care descrie propagarea oscilațiilor transversale se numește **ecuația coardei vibrante**. Conform legii fundamentale a dinamicii ecuația mișcării elementului de coardă va fi:

$$dm \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$$

Introducem masa unității de lungime μ și exprimăm din nou ecuația de mai sus astfel:

$$\mu = \frac{dm}{dx}$$

$$\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\text{Considerând } v_t^2 = \frac{F}{\mu}$$

Viteza undelor transversale este deci: $v_t = \sqrt{F/\mu} = \sqrt{E/\rho}$ unde E este modulul de elasticitate transversal.

Dacă însă mișcarea particulelor care transportă o undă mecanică are loc înainte și înapoi de-a lungul direcției de propagare, avem atunci o *undă longitudinală*. De exemplu, dacă un resort vertical sub tensiune este pus să oscileze în sus și în jos, de-a lungul resortului se va propaga o undă longitudinală. Viteza undei longitudinale este:

$$v_l = \sqrt{F/\mu} = \sqrt{E/\rho} \text{ unde } E - \text{modulul de elasticitate longitudinal}$$

Undele pot fi clasificate de asemenea în unde uni-, bi-, și tridimensionale, după numărul de dimensiuni în care ele propagă energia.

Undele de suprafață (cum ar fi undulațiile de pe apă), produse prin căderea unui obiect sunt unde bidimensionale. Undele sonore sau undele luminoase care sunt emise radial de la sursă sunt tridimensionale.

Să considerăm o perturbație tridimensională. Putem duce o suprafață prin toate punctele care suferă o aceeași perturbație la un moment dat. Apoi se pot trasa suprafețe analoage pentru perturbațiile următoare. Pentru o undă periodică putem generaliza ideea trasând suprafețele ale căror puncte se află în aceeași fază a mișcării. Aceste suprafețe se cheamă **fronturi de undă**. Dacă mediul este omogen și izotrop, direcția de propagare este întotdeauna perpendiculară pe frontul de undă.

Fronturile de undă pot avea mai multe forme. Dacă perturbațiile se propagă într-o singură direcție, undele se numesc unde plane.

Un alt caz simplu este cel al undelor sferice. În acest caz perturbația se propagă în toate direcțiile de la o sursă de unde punctiformă. Fronturile de undă sunt sfere, iar razele sunt linii radiale care pleacă de la sursa punctiformă în toate direcțiile.

Fronturile de undă sferice au o curbură foarte mică și pe o regiune limitată ele pot fi adesea privite ca plane.

Este un fapt experimental constatat că pentru multe tipuri de unde, două sau mai multe unde se pot propaga prin același spațiu, independent una de alta. Faptul că undele acționează independent una de alta înseamnă că elongația unei particule la un moment dat, este pur și simplu rezultanta elongațiilor pe care le-ar produce fiecare undă individuală. Acest proces de compunere vectorială a elongațiilor unei particule se cheamă suprapunere (superpoziție). De exemplu undele radio de diferite frecvențe care trec prin antena de radio. Analog, într-un sunet putem asculta notele emise de instrumentele individuale dintr-o orchestră, deși unda sonoră care ajunge la urechile noastre de la întreaga orchestra este foarte complexă.

Principiul lui Huygens: orice punct de pe o suprafață de undă, având centrul de oscilație în sursa S_0 emite unde secundare de oscilație, acesta putând fi ales ca sursă secundară de oscilație și fiecare din aceste suprafețe de unde secundare are o rază vt la momentul t , iar înfățișarea tuturor undelor secundare formează o nouă suprafață care constituie frontul de undă la momentul t .

Pentru undele din medii deformabile se îndeplinește principiul suprapunerii (superpoziției) care este valabil ori de câte ori relația matematică dintre deformație și forța elastică este o simplă proporționalitate. O astfel de relație este exprimată matematic printr-o ecuație liniară. Pentru undele electromagnetice principiul suprapunerii este valabil din cauză că relațiile matematice dintre câmpul electric și cel magnetic sunt liniare. Importanța principiului suprapunerii este aceea că, acolo unde este valabil, el face posibilă analiza mișcării ondulatorii complexe ca o combinație de unde simple. După cum a arătat matematicianul francez J. Fourier (1768-1830) tot ceea ce este necesar pentru a construi cea mai generală formă a unei unde periodice sunt undele armonice. Fourier a arătat că orice mișcare periodică a unei particule poate fi reprezentată ca o combinație a mișcărilor armonice simple. De exemplu: dacă $y(t)$ reprezintă mișcarea unei surse de unde cu perioada T , putem descompune pe $y(t)$ după cum urmează:

$$Y(t) = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + \dots + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots$$

Această expresie se cheamă serie Fourier. Coeficienții A și B sunt constante care au valori bine definite pentru orice mișcare periodică particulară $y(t)$. Dacă mișcarea nu este periodică, cum este o perturbație, suma se înlocuiește cu o integrală, așa numita integrală Fourier. Prin urmare orice mișcare a unei surse de unde, poate fi reprezentată cu ajutorul mișcării armonice simple. Deoarece mișcarea sursei generează undele, nu este o surpriză că undele însăși pot fi analizate ca fiind combinații de unde armonice simple. În aceasta constă importanța mișcării armonice simple și a undelor armonice simple.

III.2. Fenomene specifice undelor

1. Reflexia și refracția. O undă de orice natură care ajunge la suprafața de separație a două medii diferite suferă fenomenele de reflecție și refracție, adică parțial trece dintr-un mediu în altul, iar parțial se întoarce în mediul în care a fost produs. Această concluzie generalizează numeroasele experimente efectuate cu toate categoriile de unde. Legile experimentale ale reflexiei și refracției pot fi regăsite teoretic impunând anumite condiții de continuitate pe suprafața de separație. Vom

stabili în cele ce urmează legile acestui fenomen în cazul undelor scalare care se propagă în medii izotrope, liniare, nedispersive, conservative și omogene.

Fie mediile I și II caracterizate prin vitezele de fază v_1 și v_2 separate prin suprafața plană σ . Din mediul I sosește spre suprafața II unda incidentă a cărei direcție de propagare dată de versorul \vec{n}_i face cu normala la planul σ unghiul α_1 numit *unghi de incidență*. Considerăm unda incidentă, unda armonică plană de frecvență ω_i și amplitudine a_i

$$\psi_i = a_i e^{i\omega_i \left(t - \frac{\vec{n}_i \vec{r}}{v_1} \right)}$$

unda refractată de amplitudine a_r se propagă după direcția dată de versorul \vec{n}_r și face cu normala la planul de separație unghiul α_2 numit *unghi de reflexie*.

$$\psi_r = a_r e^{i\omega_r \left(t - \frac{\vec{n}_r \vec{r}}{v_1} \right)}$$

Unda refractată, numită și *undă transmisă*, de amplitudine a_t se propagă în mediul II după o direcție dată de versorul \vec{n}_t și face unghiul α_3 numit *unghi de refracție* cu direcția normală la planul σ

$$\psi_t = a_t e^{i\omega_t \left(t - \frac{\vec{n}_t \vec{r}}{v_2} \right)}$$

Vom impune funcției de undă condiția de a fi continuă pe suprafața de separație dintre cele două medii. O astfel de condiție rezultă din considerente fizice: dacă ψ este presiunea unei unde elastice ea trebuie să aibă aceeași valoare pe ambele fețe ale suprafeței.

$$(\Psi_i + \Psi_r)_\sigma = (\Psi_t)_\sigma$$

adică

$$a_i e^{i\omega_i \left(t - \frac{\vec{n}_i \vec{r}}{v_1} \right)} + a_r e^{i\omega_r \left(t - \frac{\vec{n}_r \vec{r}}{v_1} \right)} = a_t e^{i\omega_t \left(t - \frac{\vec{n}_t \vec{r}}{v_2} \right)}$$

Condiția trebuie satisfăcută identic pentru orice valori ale mărimilor independente între ele t și \vec{r} . Ceea ce înseamnă că pe planul σ cele trei unde au aceeași fază.

$$\omega_i \left(t - \frac{\vec{n}_i \vec{r}}{v_1} \right) = \omega_r \left(t - \frac{\vec{n}_r \vec{r}}{v_1} \right) = \omega_t \left(t - \frac{\vec{n}_t \vec{r}}{v_2} \right)$$

relație care este satisfăcută pentru orice valoare a lui t și \vec{r} deci:

$$\begin{cases} \omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega \\ \frac{\vec{n}_i \vec{r}}{v_1} = \frac{\vec{n}_r \vec{r}}{v_2} = \frac{\vec{n}_t \vec{r}}{v_1} \end{cases}$$

relațiile de mai sus exprimă legile reflexiei, refracției după cum urmează:

1. Frecvența unei unde este invariantă în raport cu procesele de reflexie – refracție. Scriem cu ajutorul cosinusurilor directori produsele scalare considerate la suprafața de separație ($z = 0$), astfel:

$$\begin{aligned}\vec{n}_i \vec{r}_i &= x \cos \beta_1 + y \cos \gamma_1 + z \cos \theta_1 \\ \vec{n}_r \vec{r}_r &= x \cos \beta_2 + y \cos \gamma_2 + z \cos \theta_2 \\ \vec{n}_t \vec{r}_t &= x \cos \beta_3 + y \cos \gamma_3 + z \cos \theta_3\end{aligned}$$

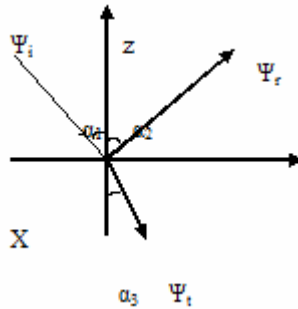


Fig.IV.2.

Punem condiția ca unda incidentă să fie cuprinsă în planul XOZ ($\cos \gamma_1 = 0$)

$$\vec{n}_i \vec{r}_i = x \cos \beta_1$$

$$\vec{n}_r \vec{r}_r = x \cos \beta_2 + y \cos \gamma_2$$

$$\vec{n}_t \vec{r}_t = x \cos \beta_3 + y \cos \gamma_3$$

Scriem condițiile impuse anterior

$$\frac{x \cos \beta_1}{v_1} = \frac{x \cos \beta_2 + y \cos \gamma_2}{v_1} = \frac{x \cos \beta_3 + y \cos \gamma_3}{v_2}$$

se obține:

$$\frac{\cos \beta_1}{v_1} = \frac{\cos \beta_2}{v_1} = \frac{\cos \beta_3}{v_2}$$

$$\frac{\cos \gamma_1}{v_1} = \frac{\cos \gamma_2}{v_1} = \frac{\cos \gamma_3}{v_2} = 0$$

această ultimă relație permite definirea următoarei legi:

2. Direcțiile de propagare ale undelor incidente, reflectată și transmisă și direcția normalei la suprafața de separație sunt coplanare. De asemenea se obțin următoarele relații:

$$\beta_1 = \beta_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \text{ adică}$$

3. Unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență și \Rightarrow

$$\frac{\cos \beta_1}{v_1} = \frac{\cos \beta_3}{v_2} \Rightarrow \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_3} = \frac{v_1}{v_2} = N$$

4. Raportul dintre sinusul unghiului de incidență și sinusul unghiului de refracție este egal cu raportul vitezelor de propagare ale undelor în cele două medii și se numește indicele relativ al mediilor. Pentru a calcula amplitudinea undei reflectate și undei transmise vom scrie condiția de continuitate și din egalitatea fazelor se obține următoarea relație între amplitudinile celor trei unde:

$$a_i + a_r = a_t$$

Pornim de la faptul că unei mărimi scalare ψ , i se poate asocia o mărime vectorială

$$\vec{\varphi} = \chi \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{r}} \quad \text{unde } \chi \text{ este o constantă de material}$$

Dacă ψ este o funcție de undă atunci și $\vec{\varphi}$ este o funcție de undă pentru care se poate impune condiția de continuitate pentru componenta normală la suprafața de separație

$$(\vec{\varphi}_i \vec{n}_n + \vec{\varphi}_r \vec{n}_n)|_\sigma = \vec{\varphi}_t \vec{n}_n|_\sigma$$

$$\vec{\varphi}_i = -a_i \frac{\vec{n}_i}{v_i} i\omega e^{i\omega \left(t - \frac{\vec{m}_i \vec{r}}{v_i} \right) k}$$

după efectuarea calculelor se obține:

$$\frac{\chi_1}{v_1} (a_i \vec{n}_i \vec{n}_n + a_r \vec{n}_r \vec{n}_n) = \frac{\chi_2}{v_2} a_t \vec{n}_t \vec{n}_n$$

dar:

$$\begin{aligned} \vec{n}_i \vec{n}_n &= -\cos \alpha_1 \\ \vec{n}_r \vec{n}_n &= \cos \alpha_1 \\ \vec{n}_t \vec{n}_n &= -\cos \alpha_2 \end{aligned}$$

$$a_i - a_t = \frac{\chi_1}{\chi_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} \cdot a_t$$

notăm cu $z = \frac{\chi}{v}$ o nouă constantă de material pe care o vom numi impedanța mediului

$$\begin{cases} a_i - a_r = \frac{\chi_1}{\chi_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} \cdot a_t \\ a_i + a_r = a_t \end{cases}$$

rezolvând sistemul de mai sus rezultă

$$a_r = \frac{z_1 \cos \alpha_1 - z_2 \cos \alpha_2}{z_1 \cos \alpha_1 + z_2 \cos \alpha_2} a_i$$

$$a_t = \frac{2z_1 \cos \alpha_1}{z_1 \cos \alpha_1 + z_2 \cos \alpha_2} a_i$$

Observație:

În cazul particular al incidenței normale $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ formulele devin:

$$a_r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} a_i$$

$$a_t = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} a_i$$

dacă $z_1 \gg z_2 \Rightarrow a_r = a_i$ și dacă, $z_1 \ll z_2 \Rightarrow a_r = -a_i$

are loc schimbarea semnului de echivalență cu modificarea fazei cu $\pm \pi$ deoarece

$e^{\pm i\pi} = -1$. Modificarea fazei modifică diferența de drum $\delta = \pm \frac{\pi}{k} = \pm \frac{\lambda}{2}$

2. Interferența undelor. Interferența se referă la efectele fizice ale suprapunerii a două sau mai multe unde. Să considerăm două unde de frecvențe și amplitudini egale care se propagă cu aceeași viteză pe aceeași direcție (+OX) dar cu o diferență de fază φ între ele. Ecuațiile celor două unde vor fi:

$$Y_1 = Y_m \sin(kx - \omega t - \varphi) \quad \text{și} \quad Y_2 = Y_m \sin(kx - \omega t)$$

Putem retranscrie prima ecuație sub două forme echivalente:

$$Y_1 = Y_m \sin \left[k \left(x - \frac{\varphi}{k} \right) - \omega t \right] \quad \text{sau}$$

$$Y_1 = Y_m \sin \left[xk - \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega} \right) \right]$$

Ecuțiile ne sugerează faptul că dacă luăm un „instantaneu” al celor două unde la un moment t , le vom găsi deplasate una față de alta de-a lungul axei OX cu o distanță constantă $\frac{\varphi}{k}$. Ecuțiile ne sugerează faptul că dacă ne-am așeza în orice punct x , cele două unde vor da naștere la două mișcări armonice simple având o diferență de timp constantă $\frac{\varphi}{\omega}$. Aceasta ne dă o privire asupra semnificației diferenței de fază φ .

Să găsim acum unda rezultantă care în ipoteza că se produce suprapunerea este egală cu suma ecuațiilor sau

$$y = y_1 + y_2 = Y_m [\sin(kx - \omega t - \varphi) + \sin(kx - \omega t)]$$

Din formula trigonometrică pentru suma sinusurilor a două unghiuri

$$\sin B + \sin C = \frac{2 \sin\left(\frac{B+C}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{C-B}{2}\right)} \quad \text{obținem}$$

$$Y = Y_m \left[2 \sin\left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2}\right) \cos \frac{\varphi}{2} \right]$$

$$Y = 2Y_m \cos \frac{\varphi}{2} \left[\sin\left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2}\right) \right]$$

Unda rezultantă corespunde unei noi unde având aceeași frecvență dar cu amplitudinea

$$Y = 2Y_m \cos \frac{\varphi}{2} A$$

Dacă φ este foarte mic (în comparație cu 180°), amplitudinea rezultantă va fi apropiată de $2Y_m$. Adică dacă φ este foarte mic, $\cos \frac{\varphi}{2} \cong \cos 0 = 1$. Dacă φ este 0, cele două unde au peste tot aceeași fază. Maximul unei unde corespunde cu maximul celeilalte și analog pentru minime. Se spune atunci că undele interferă constructiv deci se întăresc. Amplitudinea rezultantă este egală cu dublul amplitudinii unei singure unde. Dacă φ este apropiat de 180° , amplitudinea rezultantă va fi aproape 0. Adică pentru

$$\varphi \cong 180^\circ \quad \cos \frac{\varphi}{2} \cong \cos 90^\circ = 0.$$

Dacă φ este exact 180° maximul unei unde corespunde exact cu minimul celeilalte. Se spune atunci că undele interferă distructiv deci se slăbesc.

În practică, efectele de interferență se obțin cu trenuri de unde care sunt generate de aceeași sursă (sau de surse care au o diferență de fază fixă între ele) dar care parcurg drumuri diferite până la punctul de interferență. Diferența de fază φ dintre undele care ajung într-un punct poate fi calculată aflând diferența dintre drumurile parcurse de ele de la sursă până la punctul de interferență. Diferența de drum este $\frac{\varphi}{k}$ sau $\frac{\varphi \lambda}{2\pi}$. Dacă diferența de drum este 0, λ , 2λ , 3λ ,... etc. astfel încât $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi$, etc. cele două unde

interferă constructiv. Pentru diferențe de drum de $\frac{1}{2} \lambda$, $\frac{3}{2} \lambda$, $\frac{5}{2} \lambda$, $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi$ și undele interferă distructiv.

Unde staționare. Undele transversale (particulele mediului oscilează perpendicular pe direcția de propagare) sunt posibile numai în mediile solide elastice. În cazul corzilor (fire elastice cu secțiune constantă) viteza frontului de undă în coarda supusă unei tensiuni mecanice \vec{T} și având o densitate liniară $\square = \frac{m}{L}$ este: $v = \left(\frac{T}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$

În coardă se propagă în sens direct unde progresive, iar în sens invers unde regresive. Pentru oscilații armonice, funcțiile de undă care descriu propagarea unei progresive și a unei regresive sunt:

$$f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) = A \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = A \cdot \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{v} + \pi\right)\right] = A \cdot \sin(\omega \cdot t + k \cdot x + \pi)$$

unde $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ este numărul de undă. Interferența acestor unde va da naștere în coarda elastică unor unde numite unde staționare descrise de ecuația:

$$F = f_1 + f_2 = 2 \cdot A \cdot \cos\left(k \cdot x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot A \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Această ecuație reprezintă ecuația undelor staționare sau a *modurilor de vibrație* într-o coardă. Conform acestei ecuații fiecare punct al mediului execută o oscilație de amplitudine constantă în timp, dar distribuită în spațiu după relația:

$$A(x) = 2A \sin(k \cdot x)$$

Valorile minime ale amplitudinii se obțin în anumite puncte numite *noduri*, care satisfac condiția:

$$A(x) = 0 \quad \text{adică:} \quad k \cdot x = n \cdot \pi$$

de unde se obține:

$$x_{nod} = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{2\pi} \lambda = \frac{n\lambda}{2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Valorile de amplitudine maximă, numite *ventre*, satisfac condiția:

$$A(x) = \pm 2 \cdot A \quad \text{adică:} \quad k \cdot x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sau} \quad x_{\text{ventru}} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}; \quad \text{cu } n = 1, 2, 3, \dots$$

Energia undelor staționare rămâne localizată, neputându-se transmite, teoretic, prin noduri. La capete, deoarece coarda este fixă, vor exista noduri, iar lungimea corzii și lungimea de undă λ vor fi legate prin relația de cuantificare a lui Taylor:

$$L = \frac{n\lambda_n}{2} = 2 \frac{L}{n} \quad \text{unde } n = 1, 2, 3, \dots$$

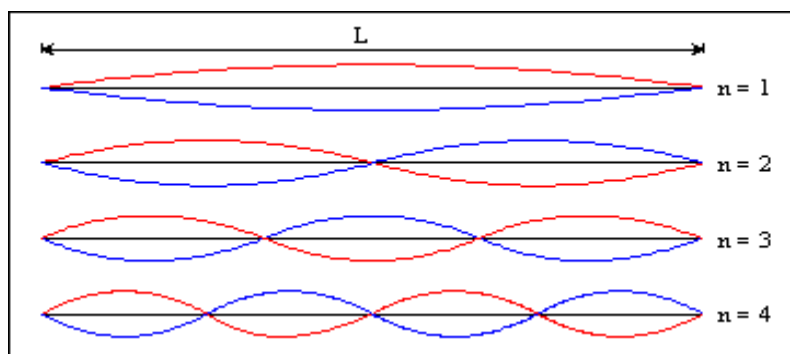


Figura IV.2. Moduri de vibrație într-o coardă de lungime L.

Ținând cont de viteza undelor transmise prin coardă, rezultă că undele staționare, sau modurile de vibrație ale corzii, pot avea numai anumite frecvențe, cuantificate prin relația:

$$v_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} \cdot \left(\frac{T}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{unde } n = 1, 2, 3, \dots$$

Pentru $n=1$ se obține *frecvența fundamentală*, λ_1 , careia îi corespunde modul fundamental de vibrație (armonica fundamentală) iar pentru celelalte valori ale lui n se obțin armonicile superioare. Frecvențele pentru care coarda vibrează în regim staționar alcătuiesc un spectru discret de valori proprii de vibrație al corzii, sau rezonanțele. Acesta formează modurile de vibrație ale corzii, care sunt ilustrate în figura IV.2.

III.3. Câmpul sonor

Acustica este un capitol al fizicii care studiază producerea, propagarea și recepționarea undelor sonore. Domeniul de frecvență al acestora este cuprins între 16 – 20000 Hz. Undele pe care le-am considerat până acum au fost de tip armonic simplu, în care elongațiile în fiecare moment sunt reprezentate de o curbă sinusoidală. Am observat că prin suprapunerea unui număr mare de astfel de unde, având aceeași frecvență și viteză, dar amplitudini și faze arbitrare rezultă o undă de același tip. Dacă

însă suprapunem unde care au frecvențe diferite, unda rezultantă va fi o undă complexă. Într-o undă complexă mișcarea unei particule nu mai este o mișcare armonică simplă și forma undei nu mai este o curbă sinusoidală. Undele sonore sunt un exemplu de acest tip. Timpanul urechii noastre va vibra în modul reprezentat de rezultanta lor, dar noi vom auzi și interpreta acestea ca și când cele două frecvențe inițiale, sunt independente indiferent de diferența lor de fază. Viteza undelor sonore corespunde cu viteza undelor longitudinale. O mărime fizică care prezintă interes este presiunea sonoră p . Prin definiție

$$p = \frac{F}{S} = -E \frac{d\psi}{dx} \text{ unde prin } S \text{ am notat suprafața de acțiune a forței } F$$

Înlocuind valoarea $\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\omega}{v} a \cos \omega(t - \frac{x}{v})$ și ținând cont de ecuația $v_l = \sqrt{E/\rho}$

presiunea sonoră instantanee este: $p = \nu \rho a \omega \cos \omega(t - \frac{x}{v}) = p_{\max} \cos \omega(t - \frac{x}{v})$

Ținând seama de expresia vitezei particulelor din câmpul sonor putem scrie:

$$p = \rho v \dot{\psi}$$

Iar pentru presiunea maximă: $p_{\max} = \rho v \dot{\psi}_{\max} = \rho v a \omega$

Câmpul sonor poate fi caracterizat și prin **intensitatea sonoră** care reprezintă fluxul de energie ondulatorie prin unitatea de suprafață:

$$I = \frac{\Phi}{S} = \frac{1}{2} \rho v a^2 \omega^2$$

III.4. Efectul Doppler

Unda emisă de o sursă de oscilații se propagă de la sursă până la receptorul care o detectează. Prin detectarea undei se înțelege măsurarea unei anumite mărimi caracteristice ei, de exemplu, frecvența undei. Dacă sursa și receptorul sunt în repaus unul față de celălalt, frecvența undei măsurată de receptor este egală cu frecvența undei emisă de sursă. Dacă însă sursa de oscilații este în mișcare față de receptor, frecvența undei măsurate de receptor diferă de aceea a undei emise de sursa de oscilații. Acest efect care se observă când sursa și receptorul sunt în mișcare unul față de celălalt, se numește **efect Doppler** și a fost descoperit în anul 1842 de către Christian Doppler.

Explicația fenomenului a fost dată de către Hyppolyte Fizeau în 1859. Dacă sursa se mișcă, de exemplu din S în S' , undele sferice emise succesiv, se apropie unele de altele în sensul de mișcare al sursei. Distanța dintre suprafețele sferice de fază egală reprezintă lungimea de undă; se observă astfel că la receptorul R staționar, ajung în unitatea de timp, unde cu suprafețele sferice mai apropiate între ele în comparație cu situația în care sursa ar fi în repaus față de receptor. Întrucât suprafețele de fază egală sunt aparent mai apropiate, lungimea de undă aparentă λ_a este mai mică și deci frecvența undelor măsurate de receptor este în acest caz mai mare. Dacă sursa este staționară, iar receptorul se deplasează către sursa S , acesta întâlnește în unitatea de timp mai multe unde sferice, decât dacă receptorul ar fi fost fix și undele ar fi ajuns la el. Ca urmare receptorul în mișcare către sursă detectează o frecvență mai mare.

Pentru a exprima cantitativ modificarea frecvenței în efectul Doppler se notează cu v viteza de deplasare a sursei S față de receptor, cu v_s frecvența undelor emise de sursă

și cu v_R frecvența undelor măsurate de receptor. Undele studiate se propagă cu viteza v în mediul în care se găsesc sursa și receptorul; această viteză fiind o caracteristică a mediului respectiv nu este afectată de mișcarea sursei sau a receptorului.

În timpul t sursa emite $v_S \cdot t$ și, dacă sursa ar fi fixă, aceste unde ar parcurge distanța $v \cdot t$. Lungimea de undă se obține ca raportul între distanța $v \cdot t$ parcursă și numărul de unde care acoperă această distanță adică:

$$\lambda = \frac{v \cdot t}{n}$$

Relația obținută este binecunoscută, dar ea a fost stabilită printr-un raționament nou care va fi folosit în cazul în care există mișcarea sursei sau a receptorului.

Dacă sursa se deplasează către receptor cele $v_S \cdot t$ unde emise de sursa se vor răspândi într-un spațiu mai mic decât $v \cdot t$, deoarece în timpul t sursa însăși s-a deplasat cu distanța $u \cdot t$. Aceasta înseamnă că numărul de unde $v_S \cdot t$ emise de sursă în timpul t se vor găsi în spațiul $v \cdot t - u \cdot t$, iar lungimea de undă aparentă, definită ca raportul între spațiul $v \cdot t - u \cdot t$ și numărul de unde $v_S \cdot t$.

Frecvența corespunzătoare lungimii de undă λ_a este frecvența măsurată de receptor v_R .

Dacă sursa se depărtează de receptor, numărul de unde $v_S \cdot t$ se întind pe distanța $v \cdot t + u \cdot t$; lungimea de undă aparentă este în acest caz $\lambda_a = (v + u) / v_S$. Adoptând convenția că u este pozitiv pentru mișcarea sursei către receptor și negativ când sursa se îndepărtează de receptor, relația de mai sus este aplicabilă și în acest caz.

$$v = v_0 \frac{v}{v + u}$$

Presupunând apoi că receptorul se mișcă spre sursă cu viteza u' , viteza sa relativă față de unde este $v + u'$, iar numărul de unde pe care receptorul le întâlnește în timpul t este $(v + u')t / \lambda_a$ în care $\lambda_a = v / v_S$. Frecvența măsurată de receptor este:

$$v = v_0 \frac{v - u}{v}$$

Dacă receptorul se depărtează de sursă, la el ajung mai puține unde în timpul t , $(v - u')t / \lambda_a$, și deci frecvența măsurată de receptor va fi $(v - u') / \lambda_a$. Convenția ca u' să fie pozitiv când receptorul se apropie de sursă și negativ când se depărtează de sursă, face ca relația (2) să se aplice și în acest caz.

În cazul în care atât sursa cât și receptorul sunt în mișcare unul față de altul, relația generală pentru calculul frecvenței este:

$$v_R = v_0 \frac{v + u \cos \beta}{v - u \cos \alpha}$$

care se reduce pentru $u' = 0$ (R staționar) și la (2) pentru $u = 0$ (S staționar). În rezumat frecvența măsurată crește $v_R > v_S$, la apropierea relativă, adică fie pentru $u > 0$ fie pentru $u' > 0$ și frecvența măsurată scade, $v_R < v_S$, la depărtarea relativă, adică fie pentru $u < 0$ fie pentru $u' < 0$.

Aceste rezultate sunt aplicabile în multe cazuri. De exemplu pentru undele sonore un observator percepe o frecvență mai mare, adică sunete mai înalte dacă sursa de sunete

se apropie de el și o frecvență mai mică, adică sunete mai joase, dacă sursa se depărtează.

Efectul Doppler este foarte important în astronomie unde prin măsurarea frecvenței radiațiilor care provin de la stele sau galaxii îndepărtate se poate stabili mișcarea acestora față de planeta noastră. Prin astfel de măsurători se obține întotdeauna o frecvență mai mică a radiațiilor luminoase caracteristice astrilor respectivi. Aceasta înseamnă că lungimea de undă măsurată este mai mare decât cea reală; cu alte cuvinte are loc o deplasare spre „roșu” a radiațiilor luminoase respective) lumina roșie are lungimea de undă cea mai mare în domeniul vizibil). Valoarea variației frecvenței crește cu distanța de la Pământ, ceea ce sugerează că întregul Univers este în expansiune, adică toți astrii se îndepărtează spre limitele Universului, cu viteze din ce în ce mai mari pe măsură ce sunt mai depărtați de Pământ. Aceasta este o problemă majoră a cosmologiei și studiul ei se bazează în principal pe efectul Doppler.

CAP. IV. ELECTROMAGNETISM

IV.1. Mărimi fizice caracteristice câmpului electromagnetic

Din punct de vedere al teoriei macroscopice câmpul electromagnetic este generat de o distribuție de sarcini și de curenți electrici. Câmpul electromagnetic reprezintă o formă de existență a materiei într-un domeniu al spațiului caracterizat de patru vectori: intensitatea câmpului electric $\vec{E}(x, y, z, t)$, inducția electrică $\vec{D}(x, y, z, t)$, intensitatea câmpului magnetic $\vec{H}(x, y, z, t)$ și inducția magnetică $\vec{B}(x, y, z, t)$. Vectorii $\vec{E}(x, y, z, t)$ și $\vec{B}(x, y, z, t)$ sunt considerați vectori de câmp fundamentali, iar vectorii $\vec{D}(x, y, z, t)$ și $\vec{H}(x, y, z, t)$ se pot obține din primii împreună cu proprietățile electrice și magnetice care caracterizează mediul în care se manifestă câmpul.

În electromagnetism sarcina electrică este o mărime fundamentală la fel ca și masa, lungimea, și timpul în mecanică. Sarcinile electrice aflate în repaus și (sau) în mișcare exercită forțe asupra altor sarcini electrice, numite forțe electromagnetice, iar câmpurile corespunzătoare, câmpuri electromagnetice. Din punct de vedere experimental s-a demonstrat că:

1. există două tipuri de sarcini electrice: pozitive și negative
2. orice sarcină electrică din natură este un multiplu întreg al sarcinii electrice elementare care are valoarea $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
3. sarcina electrică se conservă și este un invariant scalar
4. Toate sarcinile electrice își au originea în existența a două particule elementare: electron și proton; masa protonului fiind de aproximativ 1837 ori mai mare decât a electronului.
5. Sarcina electrică are caracter de substanță, ea nu poate fi creată sau distrusă, ci numai trecută de la de pe un corp pe altul.

Sarcina electrică q conținută într-un volum V poate fi exprimată cu ajutorul densității de sarcină volumică $\rho = \rho(x, y, z, t)$ sub forma:

$$q = \int_V \rho \cdot dV$$

Sarcinile electrice în mișcare generează curenți electrici. Intensitatea curentului

electric reprezintă cantitatea de sarcină netă care traversează o suprafață în unitatea de timp și este definită de relația:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

IV.2. Câmpul electrostatic

Conceptul de câmp electrostatic a fost introdus de către Michael Faraday, iar unitatea de măsură pentru câmpul electric este $\frac{N}{C}$ (newton /coulomb), unitate

echivalentă cu $\frac{V}{m}$ (volt/metru), iar din punct de vedere matematic este un câmp vectorial tridimensional. Intensitatea acestui câmp electric este direct proporțională cu mărimea sarcinii care generează câmpul și descrește invers proporțional cu pătratul distanței de la aceasta.

Pentru ca sarcinile electrice să poată fi observate ele trebuie întâi să fie separate cele negative să fie acumulate într-o parte, iar cele pozitive în altă parte. Existența sarcinilor electrice se pune în evidență prin apariția în jurul lor a unor interacțiuni. Electrostatica are ca și obiect de studiu sarcinile electrice în repaus.

Să considerăm, într-o regiune din spațiu în care există câmp electric, și două puncte P_1 și P_2 unite printr-o curbă Γ . În orice punct de pe curba Γ câmpul electric este caracterizat de vectorul intensitate a câmpului electric \vec{E} .

Produsul scalar: $dC = \vec{E} \cdot d\vec{l}$ se numește circulația infinitesimală a câmpului electric pe curba Γ . „Suma” circulațiilor elementare ale vectorului intensitate a câmpului electric pe curba Γ ,

$$C_{P_1}^{P_2} = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

se numește integrala curbilinie a vectorului pe curba Γ sau circulația vectorului între punctele P_1 și P_2 pe curba Γ . Așa cum se știe de la analiza matematică, integrala curbilinie între două puncte depinde în general, de curba pe care se efectuează integrala. Vrem să vedem dacă integrala curbilinie a vectorului intensitate a câmpului electric depinde sau nu de drumul parcurs între cele două puncte.

Să studiem circulația câmpului electric, produs de o sarcină punctiformă, între două puncte:

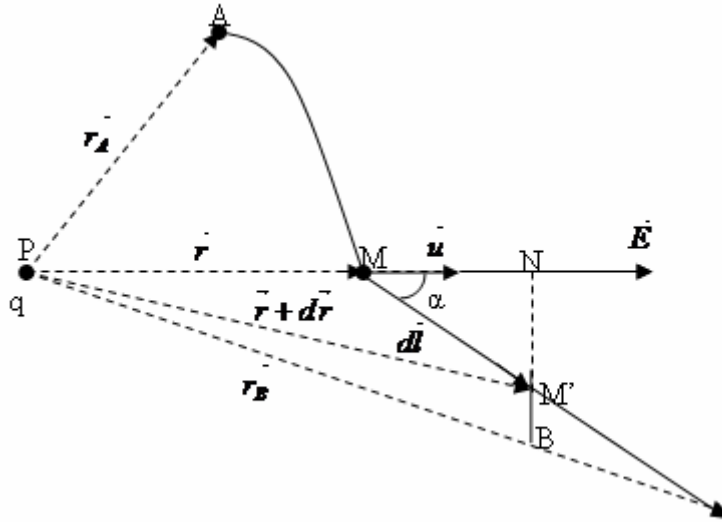


Fig. IV.1. Circulația câmpului electric produs de o sarcină punctiformă

Intensitatea câmpului electric în punctul M este

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}$$

unde \vec{u} este vectorul versor al vectorului \vec{r} . Circulația elementară pe curba Γ , a vectorului \vec{E} este:

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{l} \cdot \vec{u}}{r^2}$$

cum: $dr = dl \cdot \cos \alpha$

rezultă:

$$dC = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\right)$$

Relația de mai sus arată că valoarea infinitezimală a câmpului electric produs de o sarcină punctiformă este o diferențială totală exactă.

În analiza matematică se demonstrează că integrala curbilinie între două puncte pentru astfel de funcții nu depinde de curba aleasă. Valoarea integralei curbilinii depinde doar de poziția punctelor inițial și final.

Circulația între punctele P_1 și P_2 ale câmpului produs de o sarcină punctiformă este:

$$C_{P_1}^{P_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{P_1}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{P_2}}$$

Pentru un sistem de sarcini electrice punctiforme q_1, q_2, \dots, q_n , aplicând principiul superpoziției câmpurilor electrice, circulația elementară a intensității câmpului electric este:

$$dC = \sum_{i=1}^n dC_i = \sum_{i=1}^n d\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}\right) = d\left[\sum_{i=1}^n \left(-\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}\right)\right]$$

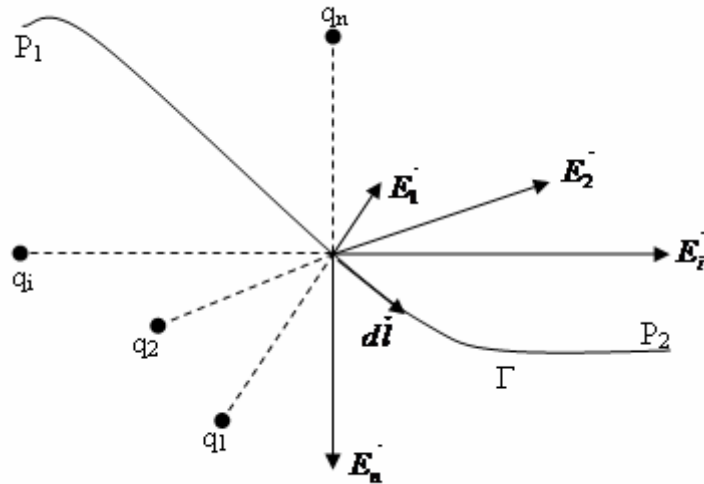


Fig. IV.2. Câmpul electric produs de un sistem de sarcini electrice

Dacă sarcinile electrice sunt punctiforme, rezultă că, în conformitate cu formula de mai sus, circulația câmpului electric este o diferențială totală exactă.

În cazul distribuțiilor continue de sarcină, suma din relația precedentă se transformă în integrală. Și în acest caz, rezultă că, circulația infinitezimală este o diferențială totală exactă.

Dacă curba pe care se face integrala este o curbă închisă (punctul P_1 coincide cu punctul P_2) atunci:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Un câmp vectorial - cum este câmpul electrostatic - care satisface relația de mai sus, se numește **câmp conservativ**.

Fie curba închisă Γ într-o regiune din spațiu în care există câmp electric. În conformitate cu teorema lui Green, oricare ar fi suprafața S ce se sprijină pe curba Γ , este valabilă relația:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

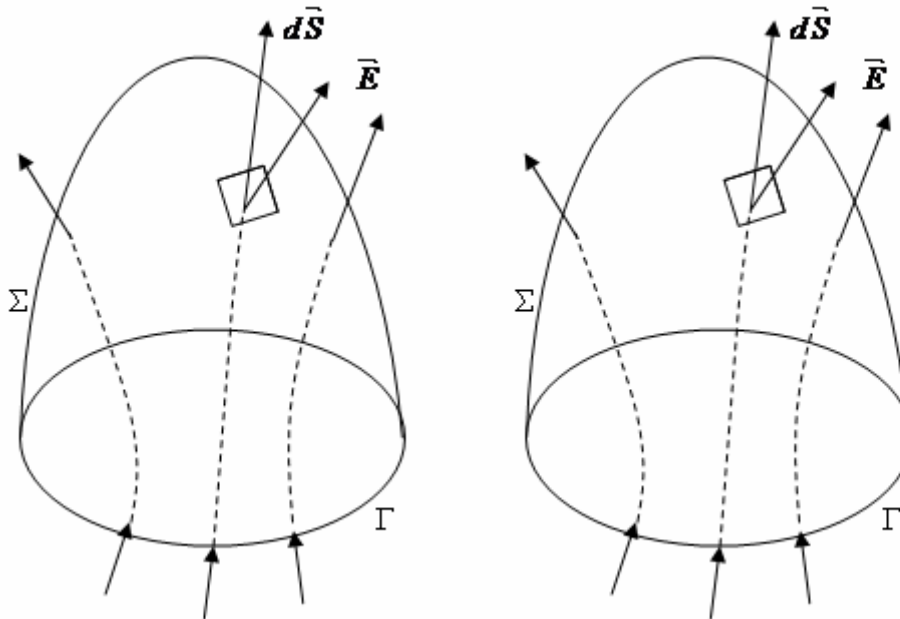


Fig. IV.3. Reprezentarea grafică a teoremei lui Green

Deoarece membrul stâng al relației de mai sus este nul și suprafața este arbitrară, rezultă că:

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

IV.3. Lucrul mecanic al forțelor electrice. Energia câmpului electric

După cum se cunoaște din mecanică, unui sistem de corpuri ce interacționează prin forțe conservative i se poate asocia o energie potențială prin relația:

$$dW = - dL$$

unde W este energia potențială iar L este lucrul forțelor conservative. Evident, energia potențială este definită până la o constantă aditivă. Pentru a fixa această constantă impunem condiția: energia potențială a unui sistem de sarcini electrice ce se află depărtate între ele la distanță foarte mare este 0. În aceste condiții, energia potențială a unei configurații de sarcini este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele electrice pentru a duce sistemul din configurația dată într-o configurație în care toate particulele se află la distanțe foarte mari una de alta.

Fie un sistem de două sarcini electrice punctiforme. Ținând cont de convenția de mai sus și de formula:

$$L_{P_1 P_2} = q (V_{P_1} - V_{P_2})$$

rezultă:

$$W = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r}$$

Această relație se mai poate scrie și astfel:

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r} q_1 + \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r} \cdot q_2 \right) = \frac{1}{2} (V_1 q_1 + V_2 q_2)$$

unde V_1 este potențialul creat de sarcina q_2 în punctul în care se află sarcina q_1 iar V_2 este potențialul creat de sarcina q_1 în punctul în care se află sarcina q_2 .

Formula (12) poate fi generalizată pentru un sistem de sarcini punctiforme, rezultând:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i \cdot q_i$$

Dacă sarcina electrică este distribuită în mod continuu, energia potențială a sistemului de sarcini va fi:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_D V(r) \rho dV$$

Fie o sarcină distribuită uniform pe o suprafață sferică de rază a și o suprafață gaussiană, Σ_i , de formă sferică, concentrică cu distribuția de sarcină electrică, de rază $r < a$. Datorită simetriei sferice, intensitatea câmpului electric, pe suprafața gaussiană, se poate calcula cu ajutorul legii lui Gauss forma integrală:

$$\vec{E}_i \cdot 4 \pi r^2 = \frac{q_i}{\epsilon_0} = 0$$

Din relația de mai sus rezultă: $\vec{E}_i = 0$

Pentru a afla intensitatea câmpului într-un punct exterior distribuției de sarcină, se alege o suprafață gaussiană de rază $r > a$. În conformitate cu legea lui Gauss, rezultă:

$$\vec{E}_i \cdot 4 \pi r^2 = \frac{4 \pi \sigma a^2}{\epsilon_0}$$

$$\text{deci: } E_e = \frac{\sigma \cdot a^2}{\epsilon_0 \cdot r^2}$$

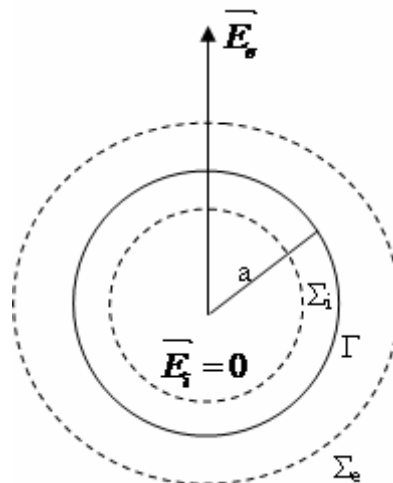


Fig. IV.4. Distribuția tridimensională a liniilor de câmp electric

După cum se observă, intensitatea câmpului electric, la suprafața distribuției de sarcină, suferă o discontinuitate.

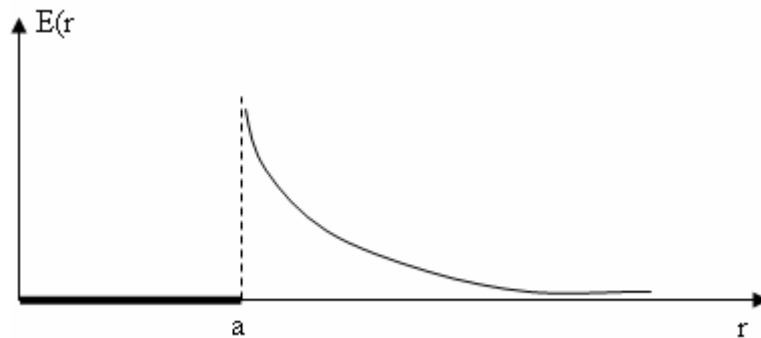


Fig. IV.5. Câmpul electric al unei sarcini superficiale sferice

Este deosebit de important să se cunoască valoarea câmpului electric chiar pe suprafața sferei de rază a .

Pentru a afla valoarea câmpului pe suprafața distribuției de sarcină, se pornește de la observația fizică conform căreia sarcina electrică nu poate să fie perfect superficială. Să admitem că sarcina electrică este distribuită în mod uniform într-un strat de grosime $r \ll a$.

Pe suprafața Σ , câmpul electric poate fi calculat cu legea lui Gauss:

$$E \cdot 4\pi(a-r+x)^2 = \frac{4\pi\rho(a-r)^2 x}{\epsilon_0}$$

Din condiția $r, x \ll a$, rezultă:

$$E = \frac{\rho}{\epsilon_0} x$$

Se constată că intensitatea câmpului electric, în interiorul stratului de sarcină electrică, este o funcție liniară de x . Valoarea medie a câmpului electric ce acționează în strat va fi:

$$\bar{E} = \frac{E(0) + E(r)}{2} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

Sarcina electrică ce se află pe unitatea de suprafață a sferei de rază a este $\sigma = \rho \cdot r$. Formula precedentă se scrie deci astfel:

$$\bar{E} = E_s = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Datorită existenței câmpului de intensitate E_s pe suprafața sferei, asupra sarcinii de pe elementul de suprafață acționează forța:

$$dF = E_s \cdot dq$$

$$dF = E_s \cdot \sigma \cdot dS = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS$$

Această forță tinde să mărească raza sferei. Pentru a micșora raza sferei de

sarcină cu dr , trebuie efectuat un lucru mecanic împotriva forței electrice, de valoare:

$$dW = \frac{\sigma^2}{2 \varepsilon_0} dS \cdot dr = \frac{2 \pi \sigma^2}{\varepsilon_0} a^2 dr$$

Singurul efect al comprimării sferei este crearea, în stratul de grosime dr , a unui câmp electric; în restul spațiului câmpul rămâne nemodificat.

Lucrul mecanic poate fi exprimat, în funcție de noul volum dV ocupat de câmp, prin formula:

$$dW = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} dV = \frac{1}{2} E^2 \varepsilon_0 dV$$

unde E este intensitatea câmpului electric în volumul de grosime dr .

Este firesc să admitem că energia mecanică, cheltuită prin efectuarea lucrului mecanic dW , să fie înmagazinată în zona de câmp nou creată și deci mărirea:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

să reprezinte densitatea de energie a câmpului electric.

În cazul în care câmpul electric ocupă domeniul D , energia înmagazinată în câmp va fi:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_D \varepsilon_0 E^2 dV$$

IV.4. Potențialul electric

Pentru a descrie câmpul electric se poate folosi una din cele două mărimi: intensitatea câmpului electric, care este un vector, sau potențialul electric, care este un scalar. Este evident că cele două mărimi, descriind aceeași realitate fizică pot fi deduse una din alta.

Pentru a determina legătura dintre potențialul electric și intensitatea câmpului electric ne folosim de relația de definiție a diferenței de potențial:

$$dV = - \vec{E} \cdot d\vec{l} = - E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

Cum potențialul electric este o funcție de punct: $V = V(x, y, z)$ diferențiala acestei funcții se poate scrie astfel:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Comparând cele două relații, rezultă că:

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}; E_y = - \frac{\partial V}{\partial y}; E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

Pentru a prezenta sintetic acest rezultat se folosește notația: $\vec{E} = - \text{grad } V$.

Gradientul unei mărimi scalare este produsul dintre operatorul ∇ și acel scalar:

$$\nabla \cdot a = \frac{\partial a}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \vec{k}$$

Fiind un vector operatorul gradient are o direcție bine precizată. Pentru a determina direcția operatorului gradient, diferențiem scalarul a :

$$d\bar{a} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{a}}{\partial z} dz = \text{grad } \bar{a} \cdot \vec{dr}$$

Fie o suprafață pe care a este constant. Rezultă: $d\bar{a} = 0$

Din relația precedentă și din definiția produsului scalar a doi vectori rezultă: $\text{grad } \bar{a} \perp \vec{dr}$

cum \vec{dr} este pe suprafața $a = \text{const.}$, înseamnă că vectorul $\text{grad } a$ este perpendicular pe această suprafață. Mărimea acestui vector este egală cu derivata funcției scalare a după direcția perpendiculară la suprafața $a = \text{const.}$. Din cele două afirmații de mai sus, rezultă că sensul gradientului este în sensul creșterii lui a pe direcția perpendiculară la suprafața $a = \text{const.}$.

Se numesc suprafețe echipotențiale suprafețele care îndeplinesc condiția:

$$V = \text{constant}$$

Din definiția gradientului și din cele discutate mai sus rezultă că liniile de câmp electric sunt perpendiculare pe suprafețele echipotențiale, fiind îndreptate spre zona descreșterii potențialului electric.

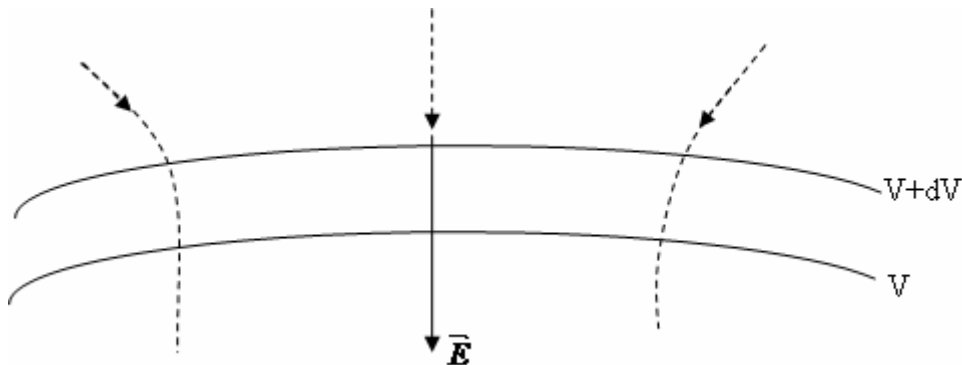


Fig. IV.6. Liniile de câmp pe suprafețele echipotențiale

Deoarece, pe componente, intensitatea câmpului electric reprezintă derivata potențialului și ținând cont că în orice punct (cu excepția punctelor în care densitatea de sarcină este infinită) intensitatea are o valoare finită rezultă că în nici un punct potențialul electric nu prezintă discontinuități. Altfel spus, potențialul electric este o mărime continuă.

Earnshaw a făcut următoarea afirmație: „nu există o configurație de sarcini fixe care să fie în echilibru stabil”.

Să presupunem că echilibrul este stabil. Dacă o sarcină este deplasată puțin din poziția de echilibru, forțele electrice tind să readucă sarcin în poziția inițială. Acesta înseamnă că liniile de câmp iradiază din punctul de echilibru al sarcinii. Rezultă că fluxul, pe o suprafață închisă ce înconjoară punctul de echilibru, este diferit de zero. În conformitate cu legea lui Gauss, în interiorul acestei suprafețe, deci în punctul de echilibru, există o sarcină electrică. Cum noi am îndepărtat sarcina din punctul considerat, rezultă că acest lucru este neadevărat. Am ajuns astfel la o contradicție. Contradicția poate fi înlăturată numai dacă afirmația lui Earnshaw este adevărată.

Ecuțiile Poisson și Laplace.

Aplicând relației (19) operatorul divergență, rezultă:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} (-\operatorname{grad} V) = -\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Operatorul $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta$ se numește laplacean și are formula:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Ecuția:

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

se numește ecuația Poisson.

Dacă $\rho = 0$ ecuația devine: $\Delta V = 0$ și se numește ecuație Laplace.

Cu ajutorul ecuației Poisson se poate cunoaște potențialul electric dacă se dă distribuția surselor sale. Legea lui Coulomb, legea lui Gauss precum și ecuația lui Poisson sunt forme diferite de descriere matematică ale aceluiași grup de fenomene: fenomenele electrostatice. Aceste legi au fost determinate în cadrul sistemelor de sarcini electrice aflate în repaus și nu există nici un motiv teoretic să admitem că ele sunt valabile și pentru sarcinile electrice aflate în mișcare. Pentru a verifica acest lucru este necesar să se facă apel la noi experiențe în care sarcinile electrice să fie în mișcare.

IV.5. Câmpul magnetic

Forțele de natură magnetică se pot împărți formal în trei categorii după cauzele fizice care dau naștere câmpului magnetic și felului interacțiunii dintre corpuri. Astfel sunt:

- **forțe magnetostatice**, care se exercită între magneți permanenți,
- **forțe electromagnetice**, care se exercită între un conductor parcurs de curent electric și un magnet permanent,
- **forțe electrodinamice** de interacțiune între conductoare parcurse de curenți electrice,
- **forțe Lorentz** care se exercită între o sarcină aflată în mișcare și un câmp magnetic.

Se introduce vectorul \vec{B} , inducția câmpului magnetic, ca o măsură a forței exercitate de câmpul magnetic asupra sarcinilor electrice în mișcare sau asupra curentului electric. Vectorul \vec{B} caracterizează câmpul magnetic în sensul în care vectorul \vec{E} caracterizează câmpul electric. Dacă sarcina q se deplasează cu viteza \vec{v} într-un domeniu din spațiu în care câmpul electric are intensitatea \vec{E} iar câmpul magnetic inducția \vec{B} , asupra acesteia va acționa o forță dată de relația :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{unde } \vec{F} = q\vec{E} \text{ este componenta electrică}$$
$$\text{iar } \vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \text{ este componenta magnetică}$$

Această forță este cunoscută sub numele de **forță Lorentz**.

Observații:

- Din relația de definiție forța Lorentz este perpendiculară pe direcția de deplasare a particulei și pe liniile de câmp, iar sensul este dat de regula burghiului.
- Această forță permite definirea unității de măsură pentru inducția câmpului magnetic

$$\langle B \rangle_{SI} = \frac{N \cdot s}{m \cdot C} = \frac{N \cdot m \cdot s}{m^2 \cdot C} = \frac{J \cdot s}{m^2 \cdot C} = \frac{V \cdot s}{m^2} = \frac{Wb}{m^2}$$

$$\langle B \rangle_{SI} = \frac{Wb}{m^2} = T$$

- Modulul forței Lorentz variază de la zero la o valoare maximă;

$$F = qvB \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} F = 0 \text{ pentru } \alpha = 0 \\ F = qvB \text{ pentru } \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Forța Lorentz permite definirea inducției câmpului magnetic;

$$B = \frac{F_{\max}}{qv}$$

este numeric egală cu forța maximă ce acționează asupra unei sarcini egală cu unitatea ($q=1C$) ce se deplasează cu viteza unitate ($V=1$ m/s)

- Deoarece forța Lorentz este perpendiculară pe traiectoria particulei ea se comportă din punct de vedere mecanic ca o forță centripetă având ca efect curbarea traiectoriei, raza de curbură fiind dată de relația:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{cp}$$

$$qvB \sin \alpha = \frac{mv^2}{R} \rightarrow R = \frac{mv}{qv \sin \alpha}$$

Considerăm un conductor parcurs de curent aflat în câmp magnetic. Asupra fiecărei sarcini electrice q care se deplasează în conductor va acționa forța Lorentz perpendiculară pe \vec{v} și respectiv \vec{B} .

$$F_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

dacă în unitatea de volum ΔV se află n purtători de sarcină electrică, atunci în elementul de volum, vom avea $n \Delta V$ purtători de sarcină și asupra elementului de volum va acționa forța totală:

$$\vec{F}_{mag} = (n \Delta V) q (\vec{v} \times \vec{B}) = (\vec{j} \times \vec{B}) \Delta V$$

asupra unității de volum al conductorului va acționa forța:

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$$

dacă se introduce elementul de volum al conductorului ca produsul $\Delta A \Delta l$ vom obține:

$$\vec{F}_{mag} = (\vec{j} \times \vec{B}) \Delta A \Delta l = (\vec{j} \Delta A \times \vec{B}) \Delta l$$

$$\vec{F}_{mag} = (\vec{I} \times \vec{B}) \Delta l$$

Forța magnetică ce acționează asupra elementului de lungime dl munită **forța Laplace** este:

$$\vec{F}_{elm} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$$

Observații:

- Forța Laplace este perpendiculară pe direcția câmpului magnetic și pe direcția curentului electric din conductor, sensul ei fiind dat de regula burghiului.
- Dacă conductorul se deplasează în câmpul magnetic pe distanța dx în lungul forței lucrul mecanic elementar efectuat este:

Între două conductoare rectilinii, paralele, filiforme și foarte lungi parcurse de curenți se exercită forțe de interacțiune. Conductorul parcurs de curentul i_2 se află în câmpul magnetic de inducție magnetică B_1 și va fi supus acțiunii unei forțe a cărei valoare este:

$$F = i_2 l B_1$$

dacă se ține seamă că inducția magnetică a câmpului produs de un conductor parcurs de curent :

$$B = \mu_0 \frac{i_2}{2\pi d}$$

rezultă relația care exprimă forța lui Ampère, de forma:

$$F = \mu_0 \frac{i_1 i_2}{2\pi d} l$$

Observații:

- Dacă conductorii sunt parcurși de curenți în același sens între ei se va exercita o forță de atracție, iar dacă sensul curenților este opus forța este de respingere.
- Pornind de la formula forței electrodinamice se poate da o definiție standardizată a unității pentru intensitatea curentului, a amperului; dacă $i_1 = i_2 = 1A$ și $d = 1m$

rezultă pentru raportul $F/l = 2 \cdot 10^{-7} N/m$

Legea fluxului magnetic

Se consideră într-un câmp magnetic o suprafață S și dS un element din această suprafață: analog cu fluxul câmpului electric se definește și fluxul inducției magnetice prin relația:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Fluxul total ce străbate întreaga suprafață S este:

$$\Phi = \iint \vec{B} d\vec{S}$$

Pornind de la relația de definiție a fluxului se definește unitatea de măsură:

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ tesla} \times 1 \text{ metru}^2$$

Experiența arată că fluxul total prin orice suprafață închisă este nul. Dacă suprafața este închisă numărul liniilor de câmp care intră prin suprafață este egal cu numărul liniilor care ies din suprafață, deoarece liniile de câmp magnetic sunt întotdeauna curbe închise.

Fluxul total printr-o suprafață închisă este egal cu zero.

$$\Phi = \iint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Observație:

- Deoarece fluxul total este zero prin analogie cu fluxul electric total rezultă că sarcina magnetică este zero $q_m = 0$
- Dacă se folosește teorema lui Gauss de transformare a integralei de suprafață într-o integrală de volum se obține:

$$\iint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} dV$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

această ultimă relație exprimă o proprietate generală importantă a câmpului magnetic, cunoscută sub denumirea de conservarea fluxului magnetic.

Legea circuitului magnetic. Legea lui Ampère

Legea circuitului magnetic, formulată de Ampère, verifică caracterul sinusoidal al câmpului magnetic. Să considerăm în vid un circuit liniar parcurs de un curent și un contur închis de formă circulară cu raza a , aflat într-un plan perpendicular pe direcția circuitului. Un asemenea contur coincide cu o linie de inducție magnetică din jurul curentului i .

Circulația vectorului \vec{B} de-a lungul unei asemenea linii închise (contur de integrare) se scrie:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint B dl \cos \alpha$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint B dl$$

Înlocuind valoarea vectorului B , rezultă:

$$\oint B dl = \mu_0 \frac{i}{2\pi a} \int_0^{2\pi} dl = \mu_0 i$$

Relația ultimă se poate obține ca rezultat al unei generalizări independent de forma liniei închise, care înconjură curentul; ea exprimă legea lui Ampère în formă integrală: Circulația vectorului inducție magnetică în lungul unei curbe închise din jurul unui conductor, este proporțională cu intensitatea curentului din conductor.

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i$$

Înlocuind curentul cu densitatea de curent, avem relația

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu \iint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S}$$

Folosind teorema lui Stokes se obține

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{B} d\vec{S} = \mu \iint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{j}$$

Această relație pune în evidență proprietatea câmpului magnetic de a avea un caracter rotațional; ea arată că rotorul intensității câmpului magnetic este egal cu densitatea de curent

Legea inducției electromagnetice. Legea lui Faraday.

Inducția electromagnetică este fenomenul prin care, în orice circuit închis, variația fluxului magnetic printr-o suprafață limitată de circuitul respectiv induce un curent electric, respectiv o tensiune electromotoare, de inducție. Acest fenomen a fost studiat pe cale experimentală de către Faraday, care a dat următoarea lege: Tensiunea electromotoare de inducție este numeric egală cu viteza de variație a fluxului magnetic prin aria circuitului și de semn minus arată că sensul tensiunii induse este astfel încât efectele ei se opun cauzei care l-a produs. Matematic se scrie:

$$e_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Observație :

Demonstrarea acestei legi se poate face pe cale energetică. Pentru aceasta se consideră un conductor care se deplasează într-un câmp magnetic constant de inducție B cu viteza constantă v. Lucrul mecanic necesar deplasării conductorului este:

$$dW=id\Phi$$

Acest lucru mecanic este cheltuit pentru deplasare uniformă , este deci un lucru mecanic rezistent. În circuit apare un curent care la trecerea prin conductor va dezvolta o energie prin efect Joule a cărei valoare în timpul dt este:

$$dW=e_i i dt$$

din legea conservării energiei rezultă relația

$$e_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

IV.6. Câmpul magnetic în substanțe

Modelul presupune că în fiecare nod al rețelei există o particulă cu spin $S_n = S(R_n)$ și că spinii interacționează între ei, interacția fiind descrisă de hamiltonianul Heisenberg și este interacție de schimb:

$$H = -\sum_{n,m} J_{nm} \vec{S}_n \vec{S}_m,$$

unde $J_{nm} = J(R_n - R_m)$

În funcție de semnul lui J_{nm} , orientarea spinilor are loc paralel sau antiparalel. Orientarea paralelă corespunde cazului feromagnetic, cea antiparalelă cazului antiferomagnetic. Dacă există un camp magnetic exterior de inducție B, spinii interacționează și cu acest câmp, energia de interacțiune fiind

$$W = -g\mu_B \vec{S}_n \vec{B}.$$

Hamiltonianul devine: $H = -\sum_{n,m} J_{nm} \vec{S}_n \vec{S}_m - g\mu_B \sum_n \vec{S}_n \vec{B}$, unde pentru electroni

factorul giromagnetic $g=2$, iar μ_B este magnetonul Bohr-Procopiu.

Deoarece interacția scade repede cu distanța, se poate neglija interacția între spinii care nu sunt vecini, luându-se în considerare doar interacția între spinii vecini de ordinul întâi în rețea.

Termenul Heisenberg din hamiltonian devine:

$$\sum_{n,m} J_{nm} \vec{S}_n \vec{S}_m = J \sum_{\langle n,m \rangle} \vec{S}_n \vec{S}_m = \frac{1}{2} J \sum_n \left(\sum_{m \in \nu(n)} \vec{S}_n \vec{S}_m \right),$$

sumarea după m fiind făcută doar pentru vecinii de ordinul I ai lui n.

Hamiltonianul devine:

$$H = -\frac{1}{2} J \sum_{n=1}^N \sum_{m \in \nu(n)} \vec{S}_n \vec{S}_m - g\mu_B \sum_n \vec{S}_n \vec{B}.$$

Suma de stare a ansamblului generalizat aflat la temperatura T este: $Z(T, B) = Tr(e^{-\beta H})$, și nu poate fi calculată exact datorită termenului Heisenberg din hamiltonian.

Pentru a se putea calcula se folosește o metodă de calcul aproximativ, numită metoda

câmpului mediu, sau metoda câmpului molecular sau metoda câmpului efectiv. Spinul din termenul Heisenberg se înlocuiește cu valoarea lui medie statistică, plus abaterea lui de la valoarea medie. Într-o primă aproximație se neglijează produsul abaterilor, acestea fiind mici.

$$\vec{S}_n \vec{S}_m = \left(\langle \vec{S}_n \rangle + \delta \vec{S}_n \right) \left(\langle \vec{S}_m \rangle + \delta \vec{S}_m \right) \approx \langle \vec{S}_n \rangle \langle \vec{S}_m \rangle + \langle \vec{S}_n \rangle \delta \vec{S}_m + \langle \vec{S}_m \rangle \delta \vec{S}_n$$

Deoarece toate nodurile rețelei sunt identice, valorile medii nu depind de nod:

$$\langle \vec{S}_n \rangle = \langle \vec{S}_m \rangle = \langle \vec{S} \rangle, \quad \text{iar} \quad \delta \vec{S}_n = \vec{S}_n - \langle \vec{S} \rangle, \quad \delta \vec{S}_m = \vec{S}_m - \langle \vec{S} \rangle \quad \Rightarrow$$

$$\vec{S}_n \vec{S}_m \approx \langle \vec{S} \rangle \left(\vec{S}_n + \vec{S}_m \right) - \langle \vec{S} \rangle^2$$

Cu această aproximație hamiltonianul devine:

$$H_{c.m.} = -pJ \sum_n \langle \vec{S} \rangle \vec{S}_n - g\mu_B \sum_n \vec{B} \vec{S}_n + \frac{1}{2} pJN \langle \vec{S} \rangle^2 \equiv -g\mu_B \sum_n \vec{B}_{ef} \vec{S}_n + \frac{1}{2} pJN \langle \vec{S} \rangle^2 \text{ unde}$$

\vec{B}_{ef} este un

câmp efectiv dat de: $\vec{B}_{ef} = \vec{B} + \frac{pJ}{g\mu_B} \langle \vec{S} \rangle$. În acest caz fiecare spin se mișcă într-un

câmp efectiv determinat de media statistică $\langle \vec{S} \rangle = Tr \left(S_m e^{-\beta H_{c.m.}} \right)$.

Alegem axa Oz astfel încât $\vec{B} = (0, 0, B)$, în acest caz și $\langle \vec{S} \rangle$ va fi orientat după Oz
 \Rightarrow

$$Z(T, B) = e^{-\frac{\beta pJN \langle S \rangle^2}{2}} \sum_{S_{z,1}=-S}^S \dots \sum_{S_{z,N}=-S}^S e^{\beta g\mu_B B_{ef} \sum_{n=1}^N S_{z,n}} = e^{-\frac{\beta pJN \langle S \rangle^2}{2}} \prod_{n=1}^N \sum_{S_{z,n}=-S}^S e^{\beta g\mu_B B_{ef} S_{z,n}} = \left[e^{-\frac{\beta pJN \langle S \rangle^2}{2}} \frac{\sinh\left(\frac{2S+1}{2S} x\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2S} x\right)} \right]^N$$

unde $x = \frac{g\mu_B B_{ef}}{kT}$ este raportul dintre energia magnetică și energia termică.

Energia liberă magnetică a sistemului este:

$$F(T, B) = -kT \ln(Z(T, B)) = -NkT \ln \left(\frac{\sinh\left(\frac{2S+1}{2S} x\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2S} x\right)} \right) + \frac{1}{2} pJN \langle S \rangle^2$$

Valoarea medie a spinului se determină din condiția de minim a energiei libere:

$$\frac{\partial F}{\partial \langle S \rangle} = 0$$

Valoarea medie a spinului depinde de câmp, și se poate scrie:

$$\frac{dF}{dB} = \frac{\partial F}{\partial B} + \frac{\partial F}{\partial \langle S \rangle} \frac{\partial \langle S \rangle}{\partial B} = \frac{\partial F}{\partial B}$$

cel de-al doilea termen este nul datorită condiției de echilibru.

Magnetizarea este:

$$M = -\frac{1}{V} \frac{dF}{dB} = ng\mu_B SB_S(x),$$

unde $B_S(x) = \frac{2S+1}{2S} = \coth\left(\frac{2S+1}{2S}x\right) - \frac{1}{2S} \coth\left(\frac{1}{2S}x\right)$ e funcția Brillouin pentru spinul \vec{S} .

Din condiția de minim se obține: $\langle S \rangle = SB_S(x)$ care poate fi înlocuită în relația magnetizării

$$\Rightarrow M = ng\mu_B \langle S \rangle \Rightarrow M = ng\mu_B SB_S \left[\frac{g\mu_B S}{kT} \left(B + \frac{pJ}{ng^2\mu_B^2} M \right) \right]$$

unde s-a înlocuit valoarea lui x și a câmpului efectiv.

În cazul în care câmpul extern este nul, $\vec{B} = 0 \Rightarrow$ ecuația de self-consistență:

$$M = ng\mu_B SB_S \left(\frac{pJSM}{ng\mu_B kT} \right)$$

Această ecuație nu se poate rezolva analitic.

Se notează cu $M_0 = ng\mu_B S$ magnetizarea de saturatie.

Magnetizarea relativă devine:
$$m(T) = \frac{M(T)}{M_0} = B_S \left(\frac{pJS^2}{kT} m \right)$$

Notăm cu $x = \frac{pJS^2}{kT} m$

Ecuația devine: $x = \frac{pJS^2}{kT} B_S(x)$

Ecuația poate fi rezolvată grafic prin intersecția dreptei $y=x$ cu curba

$$y = \frac{pJS^2}{kT} B_S(x).$$

Metoda este prezentată în figura următoare:

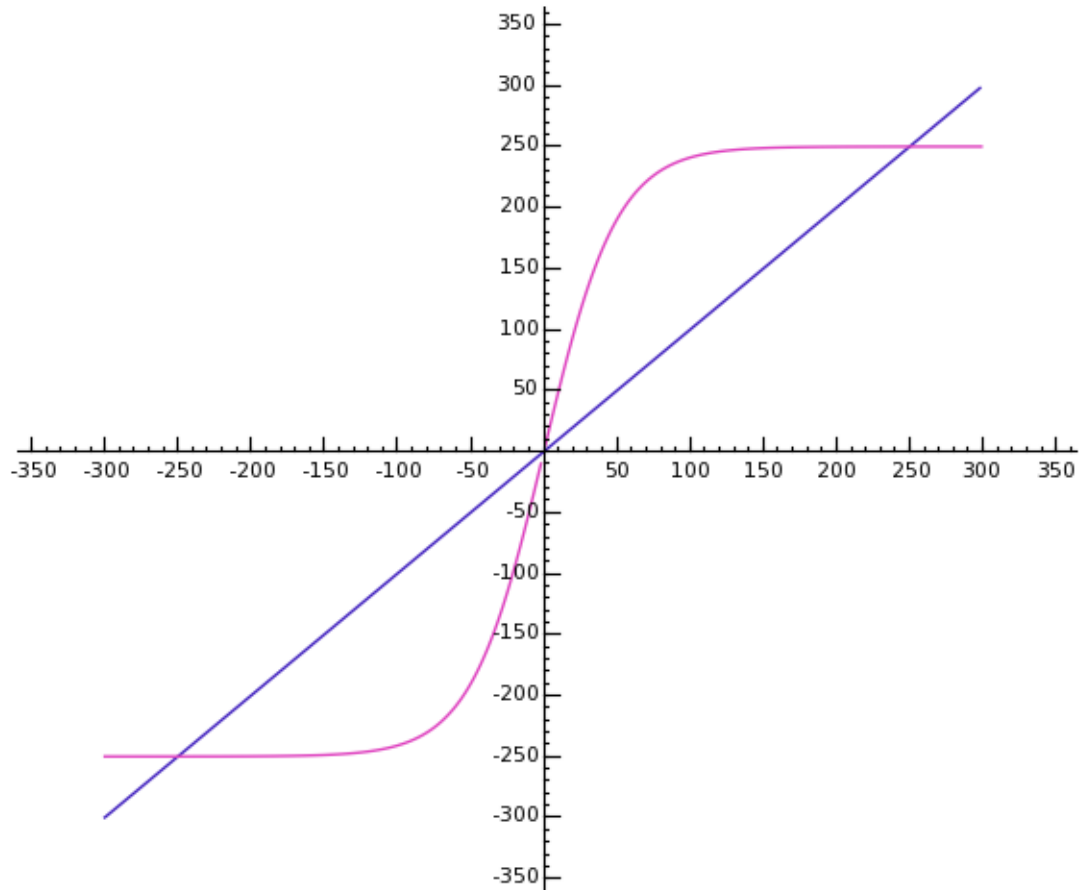


Fig. IV.7.

Funcția Brillouin pentru valori mici ale argumentului poate fi aproximată prin dezvoltarea în serie a lui: $B_S(x) \approx \frac{S+1}{3S} x$.

Dacă coeficientul lui x este mai mic decât 1, curba va intersecta dreapta numai în origine, având doar soluția banală $m=0$.

Dacă valoarea coeficientului este mai mare decât 1, se obțin soluții $\pm m \neq 0$. În acest caz sistemul are o magnetizare spontană deoarece sistemul de spini se auto-ordonează.

Deoarece panta curbei depinde de temperatură, va exista o temperatură peste care ecuația nu are decât soluția banală. Această temperatură se numește temperatură critică T_C .

Ea se determină punând condiția ca dreapta $y=x$ să fie tangentă la curbă în origine, adică

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 1 \Rightarrow \frac{pJS^2}{kT} \frac{S+1}{3S} = 1 \Rightarrow kT_c = \frac{1}{3} pJS(S+1)$$

Sistemele care prezintă magnetizare spontană se numesc feromagnetice.

În prezența câmpului extern, ecuația are soluții nenule pentru \vec{M} și pentru $T > T_C$, acest domeniu de temperaturi se numește domeniu paramagnetic.

Considerând câmpul mic, se poate dezvolta funcția Brillouin în serie

reținându-se doar primul ordin de mărime $\Rightarrow m \approx \frac{S+1}{3S} \left(\frac{g\mu_B SB}{kT} + \frac{pJS^2}{kT} m \right) \Rightarrow$

$$m(T) = \frac{C}{T - T_C} B, T > T_C$$

unde $C = \frac{g\mu_B(S+1)}{3k}$ se numește constanta Curie.

Rezultă că susceptibilitatea magnetică în domeniul paramagnetic este:

$$\chi = \frac{C}{T - T_C}$$

legea Curie-Weiss.

În domeniul feromagnetic ($T < T_C$), susceptibilitatea magnetică nu are sens, existând magnetizare chiar și pentru câmp nul. La $T = T_C$ susceptibilitatea devine infinită.

IV.7. Ecuțiile lui Maxwell ale câmpului electromagnetic

În cele prezentate mai sus s-a considerat cazul staționar al interacțiunilor electromagnetice; densitatea de sarcină electrică ρ cât și densitatea de curent j nu depind explicit de timp. Dacă aceste mărimi nu mai rămân constante și se modifică în timp atunci ecuațiile fundamentale obținute anterior vor avea o altă formă. Această formă finală este dată de ecuațiile lui Maxwell care stau la baza construcției axiomatice a electromagnetismului și care au avut la baza lor observația experimentală că, în regiunea din spațiu unde este creat un câmp electric variabil există în același timp și un câmp magnetic variabil și invers. Cele două câmpuri fiind într-o interconexiune, condiționându-se reciproc, sunt două aspecte ale câmpului electromagnetic.

a) Ecuția lui Maxwell – Faraday

Această relație exprimă faptul că fenomenul de inducție electromagnetică se poate produce în orice regiune unde există un câmp magnetic variabil în timp și apare un câmp electric independent de faptul că există conductor sau nu. Ea se va obține din legea inducției electromagnetice după cum urmează:

$$e_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Exprimând tensiunea indusă cu ajutorul circulației vectorului electric, iar fluxul total exprimat prin legea lui Gauss avem:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S}$$

dar

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \nabla_x \vec{E} d\vec{S}$$

rezultă

$$\nabla_x \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Ecuția Faraday - Maxwell}$$

Observații:

- ecuația obținută exprimă legătura dintre variația în timp a lui \vec{B} într-un punct și câmpul electric \vec{E} pe care-l induce în acel punct sau, orice variație de câmp magnetic într-o regiune din spațiu determină apariția unui câmp rotațional .
- ecuația exprimă caracterul rotațional al câmpului electric indus.

b) Ecuația Ampère – Maxwell

Această ecuație este o generalizare a legii lui Ampère în condițiile unui câmp magnetic variabil. Câmpul magnetic variabil generează un câmp magnetic variabil, fenomen numit inducție magnetoelectrică.

Pentru a deduce această ecuație să vedem limitele de aplicare a legii lui Ampère.

$$\text{rot}\vec{B} = \mu\vec{j} \quad \text{sau} \quad \text{rot}\vec{H} = \vec{j}$$

această formă arată că un curent staționar de densitate \vec{j} , generează un câmp magnetic , deci ecuația de continuitate se va scrie:

$$\text{divrot}\vec{H} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

această relație nu este valabilă dacă $\rho(\vec{r}, t)$ deoarece $\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$, iar divergența unui rotor este totdeauna zero, deci nici legea lui Ampère nu este valabilă când densitatea volumică de sarcină electrică depinde explicit de timp. În acest caz formula este incompletă în cazul curenților electrici nestaționari.

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + (?)$$

Problema pusă de Maxwell legată de întrebarea ce anume trebuie să se adauge în relație la curentul de conducție \vec{j} ?

Dacă simetria dintre vectorii \mathbf{E} și \mathbf{B} se respectă atunci ea se va respecta și în cazul vectorilor \mathbf{H} și \mathbf{D} și ar trebui să avem o relație de forma

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Maxwell a considerat că acesta este termenul care lipsește din formula de mai sus,

adică ea trebuie scrisă: $\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ ecuația Ampère – Maxwell

Observații:

- termenul $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ este introdus pentru a completa curentul de conducție și a fost denumit de către Maxwell , densitatea curentului de deplasare \mathbf{J}_d
- noul termen, densitatea de curent de deplasare este necesar pentru ca expresia care leagă câmpul magnetic de curentul electric să fie compatibilă cu ecuația de continuitate și în cazul în care curenții de conducție variază în timp.
- această relație indică existența unui nou fenomen de inducție conform căruia câmpul electric variabil în timp generează câmp magnetic (inducția magnetoelectrică).
- acest fenomen nu a fost pus în evidență experimental deoarece este necesar ca variația câmpului electric să fie sensibilă într-un interval de timp dt necesar propagării luminii între armăturile condensatorului, adică frecvența câmpului electric trebuie să fie foarte mare.

Concluzie:

Sistemul de ecuații elaborat de către Maxwell și care pune bazele Teoriei unitare a câmpului electromagnetic este:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Aceste ecuații trebuie completate cu ecuațiile de material:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} + \vec{P} \quad \text{și} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$$

unde \vec{P} este vectorul polarizație electrică, iar \vec{J} este polarizația magnetică

Pentru mediile polarizate liniar au loc relațiile:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad \text{și} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

Ecuațiile prezentate mai sus sunt valabile în următoarele condiții:

corpurile materiale aflate în câmpul electromagnetic se află în repaus; mărimile ε_r , μ_r și γ care caracterizează proprietățile de material ale mediului nu depind de timp și nici de intensitatea câmpurilor; în câmpurile studiate nu se află magneti permanenți și substanțe feromagnetice.

Nu toate cele patru ecuații ale lui Maxwell sunt independente: ecuațiile II și III nu sunt independente, din identitatea $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ rezultă că ecuația III joacă rolul unei condiții suplimentare pentru ecuația II; de asemenea nici ecuațiile I și IV nu sunt independente, dacă aplicăm operatorul div ecuației I se impune ecuația IV, pentru a obține ecuația de continuitate;

Deci pot fi considerate independente numai ecuațiile I și II și respectiv, ecuațiile de material.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Se obține astfel un sistem de două ecuații care permit obținerea vectorilor \vec{E} și \vec{B} pentru condițiile inițiale și de limită stabilite.

IV.8. Energia câmpului electromagnetic. Teorema lui Poynting.

Exprimarea energiei câmpului electromagnetic prin vectorii caracteristici ai câmpului electromagnetic permite compararea concluziilor ecuațiilor lui Maxwell cu date experimentale.

Densitatea de energie a câmpului electromagnetic este dată de suma dintre densitatea de energie a câmpului electric w_e și densitatea de energie a câmpului magnetic w_m :

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B})$$

$$w = \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

Considerăm în regim variabil un sistem de corpuri în volumul V limitat de suprafață S, energia câmpului din volumul V va fi :

$$W = \frac{1}{2} \iiint (\epsilon \vec{E}^2 - \mu \vec{H}^2)$$

Într-un interval de timp dt energia W a câmpului electromagnetic poate să scadă din cauza disipării energiei prin efect Joule sau din cauza disipării energiei prin propagarea câmpului electromagnetic spre exteriorul volumului. Putem scrie deci:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = P_J + P_\Sigma = \iiint j^2 \rho dV + P_\Sigma$$

unde P_J este puterea disipată prin efect Joule, iar P_Σ este puterea care iese prin suprafața Σ datorită propagării câmpului electromagnetic. Scăderea energiei câmpului în unitatea de timp se scrie sub forma:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = -\iiint \left(\epsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dV$$

Calculăm mărimile $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ și $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ din ecuațiile lui Maxwell și anume:

$$\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot} \vec{H} - \vec{j}$$

$$\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E}$$

folosind aceste relații se obține:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \iiint \rho j^2 dV + \iiint (\vec{H} \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot} \vec{H}) dV$$

folosind formula:

$$\text{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{rot} \mathbf{H}$$

se obține relația:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \iiint \rho j^2 dV + \iiint \text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) dV$$

introducem mărimea: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ denumită vectorul Poynting al cărui modul reprezintă densitatea fluxului de energie, adică energia transferată prin unitatea de arie a suprafeței Σ în unitatea de timp. Unitatea de măsură a acestei mărimi este:

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$$

Relația obținută sub forma:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \iiint \rho j^2 dV + \iint \vec{S} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

reprezintă legea conservării energiei pentru câmpul electromagnetic.

Observație:

- Formula a fost obținută în ipotezele că mediul în volumul V este omogen și izotrop, iar în interiorul volumului nu există surse de tensiune electromotoare.
- Se neglijează unda electromagnetică reflectată în interiorul volumului V.

IV.9. Potențiale electrodinamice

În electrostatică (din cauză că rotorul vectorului \vec{E} este întotdeauna zero)

este posibilă relația:

$$\vec{E} = -grad\varphi \quad \text{unde } \varphi \text{ este un câmp scalar de}$$

potențiale electrice

Potențialul scalar φ se definește până la o constantă aditivă. Câmpurile φ și $\varphi+c$ reprezintă aceeași situație fizică, adică le corespund același câmp electric \vec{E} .

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

$$\vec{E} = -grad(\varphi + c) = -grad\varphi - gradc = \vec{E} = -grad\varphi$$

La fel putem defini potențialul vector \vec{A} care definește câmpul magnetic. Deoarece $div\vec{B} = 0$ rezultă că îl putem reprezenta pe \vec{B} ca fiind rotorul unui câmp vectorial \vec{A} . Pentru a stabili în mod univoc un asemenea potențial, mai trebuie impusă valoarea $div\vec{A}$, întrucât un câmp de vectori este caracterizat complet numai dacă se dă atât rotorul, cât și divergența lui. Condiția care fixează divergența potențialului vector se numește **condiție de etalonare** a potențialelor electrodinamice. În regim staționar s-a folosit condiția de etalonare $div\vec{A} = 0$. În regim general variabil se va folosi o altă condiție de etalonare.

Introducând în legea inducției electromagnetice inducția magnetică exprimată cu ajutorul potențialului vector, se obține relația:

$$rot(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = 0$$

care stabilește caracterul potențial al vectorului din paranteză. Se poate deci introduce un **potențial electrodynamic scalar** V_e , prin relația:

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -grad\varphi$$

Relațiile de mai sus sunt exprimări sub altă formă a legii fluxului magnetic și a legii inducției electromagnetice. Ele permit calculul câmpurilor \vec{E} și \vec{B} , dacă se cunosc potențialele electrodinamice \vec{A} și φ .

Cu ajutorul celorlalte două ecuații ale lui Maxwell se vor stabili ecuațiile pe care le satisfac aceste mărimi, în medii omogene, liniare și fără câmpuri imprimare, după cum urmează:

$$rot\vec{B} = \mu\vec{J} + \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

și presupun cunoscute repartițiile sarcinii electrice $\rho(\vec{r}, t)$

și a densității curentului de conducție $\vec{J}(\vec{r}, t)$.

Dacă: $\vec{B} = rot\vec{A}$ se poate calcula potențialul vectorial \vec{A} după cum urmează:

$$\Rightarrow (\nabla \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x, (\nabla \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = B_y, (\nabla \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z$$

Ca urmare componentele potențialului vectorial \vec{A} se scriu:

$$A_x = \frac{B_y z - B_z y}{2}, A_y = \frac{B_z x - B_x z}{2}, A_z = \frac{B_x y - B_y x}{2}$$

Deci obținem pentru acest potențial expresia: $\vec{A} = \frac{\vec{B} \times \vec{r}}{2}$

IV.10. Teoria electromagnetică a luminii.

În cadrul teoriei electromagnetice a luminii sunt utilizate numai proprietățile clasice ale câmpurilor electrice, pe baza acestora explicându-se pe deplin fenomenele de interferență, difracție, reflexie, refracție, absorbție și dispersie. Există și alte fenomene cum ar fi emisia și absorbția radiațiilor optice, efectele fotoelectric și Compton etc, în care intervine sub o formă detaliată interacțiunea dintre lumină și atomi, molecule, care nu pot fi explicate pe baza teoriei electromagnetice a luminii (Maxwell) și este necesară teoria cuantică.

Ecuatia de propagare a unei unde electromagnetice se poate obține plecând de la ecuațiile Maxwell și legile de material. Astfel:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\end{aligned}$$

Aplicăm operatorul rotațional primei ecuații și derivăm în raport cu timpul pe cea de-a doua ecuație obținem:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) &= \varepsilon \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Combinând aceste relații rezultă: $\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$

Ținând cont că: $\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H}$ și $\nabla^2 = \Delta \Rightarrow \Delta \vec{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$

În cazul unui mediu dielectric perfect, deci fără sarcini spațiale ($\rho = 0$) și fără curenți electrici

($j = 0$), un mediu izolan, omogen, obținem ecuația:

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ unde } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

iar $(\varepsilon \mu)^{-1/2} = v$ reprezintă **viteza de propagare** a undei.

Ecuatia undei electromagnetice (componenta electrică) se scrie:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Eliminând pe \vec{E} din ecuațiile Maxwell și ținând seama de legile de material, rezultă o ecuație de undă pentru componenta magnetică \vec{H} identică cu cea a componentei electrice \vec{E} :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

În cele ce urmează, vom considera $\psi(r,t) \rightarrow E(r,t)$. Ținând seama de valorile permitivității electrice ϵ_0 respectiv a permeabilității magnetice μ_0 în vid ($\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$; $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} [SI]$), rezultă pentru viteza undei electromagnetice valoarea: $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.

Se găsește exact aceeași valoare cu cea a vitezei luminii în vid, aceasta fiind o confirmare strălucită a ipotezei lui Maxwell că lumina este datorată propagării undelor electromagnetice (natura electromagnetică a luminii). Într-un mediu transparent, altul decât vidul, caracterizat de $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ și $\mu = \mu_0 \mu_r$, se poate defini indicele

de refracție al mediului prin relațiile: $n = \frac{c}{v}$ și $n^2 = \epsilon_r \mu_r$ care sunt verificate

pentru frecvențe foarte joase (I.R. îndepărtat). În cazul frecvențelor mari (I.R. apropiat, Viz., U.V. etc.), se constată că $\epsilon = \epsilon(v)$.

Considerăm cazul particular al problemei în care $E = E(x,t)$. Atunci ecuația undelor se reduce la: $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$;

a cărei integrală generală prin analogie cu ecuația undelor mecanice este:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

Acesta este cazul undei armonice plane. Pe baza celor prezentate mai sus se poate redefini câmpul electromagnetic ca fiind regiunea din spațiu, care este sediul undelor electromagnetice. Locul geometric al punctelor din mediu care sunt la un moment dat în fază poartă numele de **front al undei electromagnetice**.

IV.11. Polarizarea undelor luminoase.

Unda luminoasă este un câmp electromagnetic care se propagă astfel încât în fiecare moment sunt satisfăcute ecuațiile lui Maxwell. Undele electromagnetice sunt unde transversale, adică vectorii \vec{E} și \vec{H} oscilează perpendicular pe direcția de propagare. Dacă vectorul câmp electric \vec{E} oscilează astfel încât rămâne tot timpul paralel cu o direcție din planul perpendicular pe direcția de propagare, se spune că unda este liniar polarizată sau plan polarizată. De obicei planul în care oscilează vectorul \vec{E} se numește plan de vibrație, iar planul în care oscilează vectorul \vec{H} se numește plan de polarizare.

Cap. V. BAZELE FIZICII CUANTICE

V.1. Despre electron în limbaj ondulatoriu și corpuscular

Despre structura atomului redată în Fizica Atomică se poate vorbi abia de la începutul secolului XX, când au fost elaborate primele modele atomice. Atomul, cea mai complexă particulă existentă în natură este alcătuit din nucleu și înveliș electronic. Învelișul electronic al atomului se compune din orbitele electronice pe care sunt așezați și se rotesc electronii. Vorbind despre electron, suntem obișnuiți să-l considerăm drept o particulă cu masa de repaus $m_0 = 9,10955 \cdot 10^{-31}$ kg și o sarcină electrică $e = -1,60219 \cdot 10^{-19}$ C.

Învelișul electronic al atomului se compune din orbitele electronice pe care sunt așezați și se rotesc electronii. Orbitele electronice sunt dispuse la exteriorul nucleului atomic pe șapte straturi K, L, M, N, O, P, Q și șapte substraturi s, p, d, f, g, h, i care conțin un număr de 140 de orbite electronice indiferent de natura atomului. În anul 1920, Davisson inițiază o serie de experiențe care aveau drept scop sondarea câmpurilor electrice din interiorul atomului, cu ajutorul unor fascicule de electroni de energie corespunzătoare. Interacționând cu electronii ce intră în compoziția atomului, acești electroni ar fi urmat să fie deviați de la direcția lor inițială de deplasare, distribuția lor unghiulară urmând să aducă informații asupra câmpurilor electrice atomice. Instalația experimentală utilizată de Davisson este redată în fig.6.1. Electronii emiși de filamentul incandescent F, și apoi accelerați, cad pe placa metalică M care îi împrăștie.

Distribuția unghiulară a acestor electroni este determinată cu ajutorul detectorului D, curentul măsurat de galvanometrul G fiind proporțional cu numărul de electroni captați de detector în unitatea de timp. Detectorul nu înregistrează decât acei electroni împrăștiați a căror energie este egală cu energia electronilor incidenți pe placa metalică M.

Unghiul β din fig.VI.1 poate fi variat, ceea ce permite determinarea distribuției spațiale a electronilor împrăștiați. Davisson constată că distribuția unghiulară a electronilor împrăștiați se modifică substanțial atunci când printr-un tratament termic corespunzător se modifică așezarea atomilor în rețeaua cristalină, fenomenul devenind deosebit de manifest atunci când metalul trece din stare policristalină în starea monocristalină. Din acest punct de vedere, comportarea electronilor în acest fenomen are multe trăsături comune cu fenomenul de difracție a razelor X pe un cristal, fenomen studiat mai sus.

În anul 1924 Louis de Broglie propune ca fiecărei particule în mișcare să i se asocieze o undă. Știind că între impulsul fotonului p și lungimea de undă a undei electromagnetice exista relația

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

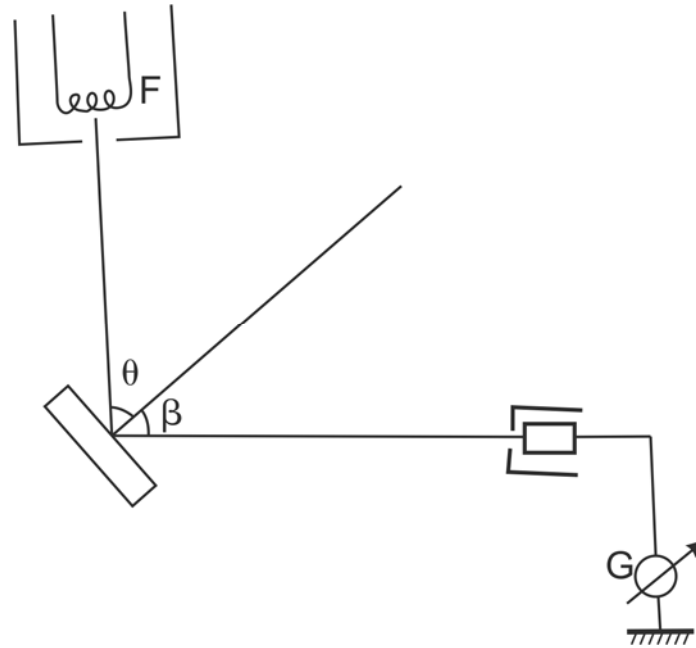


Fig.V. 1.

De Broglie consideră prin analogie că lungimea de undă a unei asociate de o particulă de masă m ce se deplasează cu viteza v este data de

$$\lambda = \frac{h}{mV}$$

Elsasser face o legătură între rezultatele experiențelor lui Davisson și ipoteza lui de Broglie, afirmând că în experiențele lui Davisson se manifestă pregnant proprietățile ondulatorii ale electronului.

În 1927, Davisson și Germer, experiențele făcute inițial cu scopul de a confirma experimental ipoteza lui De Broglie. Metalul M este înlocuit acum cu un monocristal de nichel având constanta rețelei egală cu d (la nichel $a = b = d$) unghiul β este menținut constant și egal cu unghiul de incidență, variindu-se în limite largi viteza electronilor incidenti pe monocristal, numărul de electroni emiși de filamentul F în unitatea de timp fiind menținut constant. Dacă U reprezintă diferența de potențial care produce accelerarea electronilor, atunci viteza cu care ei cad pe cristal este

$$v = \left(2 \cdot e \cdot \frac{U}{m} \right)^{1/2}$$

iar lungimea de undă a unei asociate lor este dată de: $\lambda = \frac{h}{mV} = \frac{h}{(2 \cdot e \cdot U \cdot m)^{1/2}}$

Dacă ipoteza lui De Broglie este valabilă, atunci pentru o lungime de undă λ a unei asociate electronilor care satisface condiția:

$$2 \cdot d \cdot \sin \lambda = x$$

Curentul măsurat de galvanometrul G trebuia să indice o valoare maximă. Condiția se rescrie în felul următor:

$$2 \cdot d \cdot \sin \lambda = k \cdot \frac{h}{(2 \cdot e \cdot U \cdot m)^{1/2}} \quad \text{de unde} \quad U^{1/2} = k \cdot \frac{h}{(2 \cdot e \cdot m)^{1/2} \cdot 2 \cdot d \cdot \sin \lambda}$$

În fig.V.2. sunt reprezentate rezultatele experimentale obținute de Davisson și Germer. Este redată aici dependența curentului I măsurat de galvanometrul G, de radicalul tensiunii care produce accelerarea electronilor incidenti. Se constată că intensitatea acestui curent prezintă o serie de maxime echidistante, distanța dintre două astfel de maxime fiind în concordanță cu relația de mai sus, fiind egală cu

$$d = \frac{h}{(2 \cdot e \cdot m)^{1/2} \cdot 2 \cdot d \cdot \sin \lambda}$$

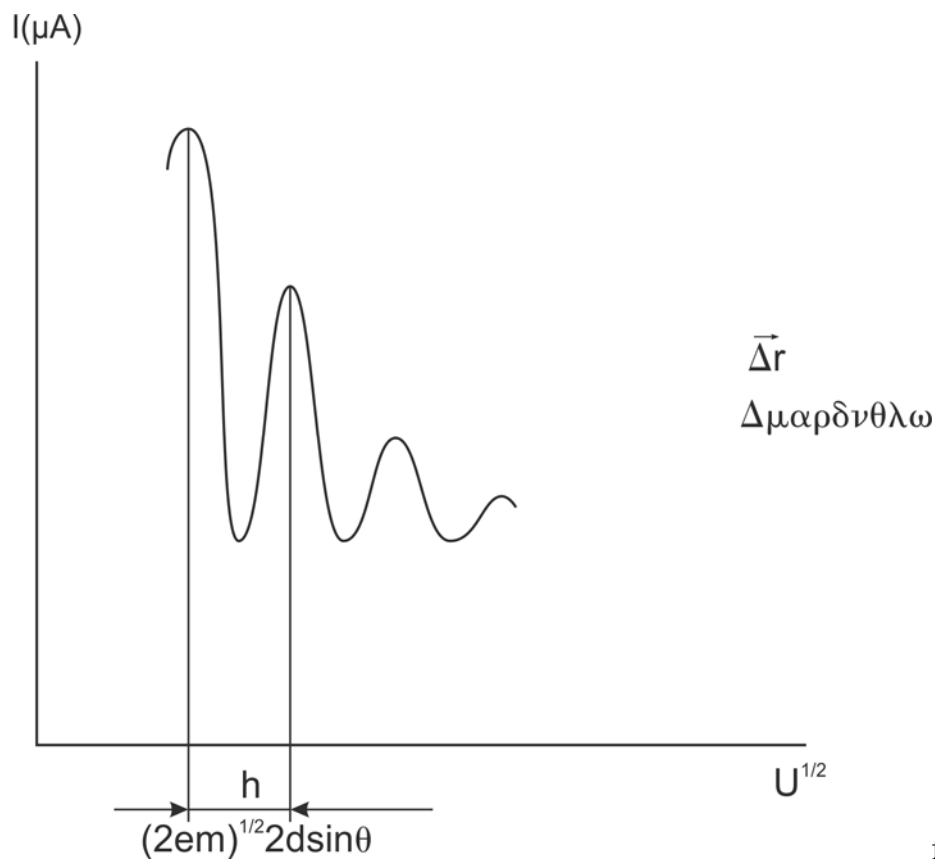


fig.V.2.

Nu mult după experiențele efectuate de Davisson și Germer au fost evidențiate fenomene asemănătoare lucrând cu neutroni, atomi sau molecule.

Experiența evidențiază deci că particulele posedă ca și fotonii proprietăți corpusculare și ondulatorii. Extinzând la electron cele stabilite în cazul fotonului, putem face următoarele afirmații :

- un electron a cărui probabilitate de localizare este aceeași în toate punctele din spațiu este asociat cu o undă plană monocromatică. Un astfel de electron are un impuls perfect determinat și o localizare spațială total nedeterminată;
- un electron a cărui probabilitate de localizare este diferită de zero într-o anumită porțiune din spațiu este asociat cu o undă ce prezintă un spectru continuu;
- așa cum densitatea probabilității de localizare a fotonului într-un punct este

proporțională cu pătratul amplitudinii intensității câmpului electric în punctul respectiv, vom admite că densitatea probabilității de localizare a electronului într-un punct care este proporțională cu pătratul unei funcții de undă $\psi(r, t)$, mărimea r determinând poziția punctului în care se determină densitatea probabilității de localizare iar t timpul la care se face această determinare. În regim staționar această funcție este independentă de timp;

- ca orice undă și unda asociată electronului poate fi caracterizată printr-o viteză de fază și printr-o viteză de grup. În cazul fotonului, viteza de fază este prin definiție raportul dintre lungimea de undă și perioada oscilației

$$V_{f,\text{foton}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu = \frac{h\nu}{\frac{h\nu}{c}} = \frac{\varepsilon}{P} = c$$

$\varepsilon = h\nu$ reprezentând energia fotonului iar $p = \frac{h\nu}{c}$ impulsul său. Amplificând această relație în cazul unui electron liber, obținem

$$V_{g,\text{electron}} = \frac{E_c}{P} = \frac{\frac{m \cdot v^2}{2}}{mv} = \frac{v}{2}$$

viteza de fază a electronului fiind de două ori mai mică decât viteza sa în mișcare rectilinie și uniformă pe care o execută.

Pentru viteza de grup a electronului obținem:

$$V_{g,\text{electron}} = \frac{dE_c}{dp} = \frac{d\left(\frac{p^2}{2m}\right)}{dp} = \frac{p}{m} = v$$

viteza de grup a electronului fiind egală cu viteza sa în mișcarea rectilinie și uniformă pe care o execută. În relațiile de mai sus E_c reprezintă energia cinetică a electronului iar p impulsul său.

V.2. Construirea ecuației lui Schrödinger monodimensionale

Pista fundamentală în construirea ecuației lui Schrödinger este ipoteza că energia totală a electronului este egală cu $h\nu$. Astfel pentru electronul liber, care

posedă numai energie cinetică: $E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} = h\nu$

iar pentru electronul care se deplasează într-un câmp de forțe care îi conferă o energie potențială V :

$$E_t = \frac{p^2}{2m} + V = \frac{h^2}{2m} + V = h\nu$$

Dacă intensitatea câmpului electric într-un punct se determină rezolvând ecuația diferențială a unei electromagnetice, funcția de undă $\psi (r, t)$ se obține prin rezolvarea ecuației lui Schrödinger pe care ne propunem s-o construim în continuare.

Dacă deplasarea electronului este unidimensională având loc de-a lungul axei OX, atunci probabilitatea evenimentului care constă în faptul că el este localizat între x și $x + dx$ este dată de $\psi^2(x)dx$. Funcția $\psi(x)$ se supune condiției de normare:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x)dx = 1$$

Relația exprimă certitudinea realizării evenimentului care constă în faptul că electronul este localizat undeva, pe dreapta pe care are loc deplasarea sa. Întrucât soluțiile ecuației lui Schrödinger pot fi imaginare în unele condiții. Astfel se alege drept măsură a probabilității de localizare a electronului, mărimea $\psi(x)\psi^*(x)dx$ în care $\psi^*(x)$ reprezintă complex conjugatul lui $\psi(x)$.

Dacă funcția de undă $\psi (x, t)$ descrie comportarea unui electron localizat într-o anumită porțiune de extensie finită pe care are loc deplasarea sa, atunci în concordanță cu cele stabilite mai sus ea poate fi exprimată prin integrala Fourier.

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(v)c^{i2\pi v(t-x/v)} dv$$

Construirea ecuației lui Schrödinger constă de fapt în stabilirea unei legături între derivata de ordinul întâi a lui $\psi (x, t)$ în raport cu timpul și derivata de ordinul doi a lui $\psi (x, t)$ în raport cu x . Coordonata x este măsurată evident pe direcția pe care are loc deplasarea electronului.

Derivând membrul stâng și membrul drept al relației de mai sus în raport cu timpul obținem:

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi v \Phi(v)c^{i2\pi v(t-x/v)} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi \left(\frac{E_c}{h} + \frac{E_p}{h} \right) \phi(v)c^{i2\pi v(t-x/v)} dv$$

Limitându-ne doar la cazurile când energia potențială a particulei este constantă, relația precedentă poate fi scrisă și sub forma

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = i2\pi h^{-1} E_p \psi(x,t) + \frac{i2\pi}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} E_c \phi(v)c^{i2\pi v(t-x/v)} dv$$

Derivând relația de două ori în raport cu x obținem succesiv

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi v V^{-1} \Phi(v)c^{i2\pi v(t-x/v)} dv$$

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = -4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (vV^{-1})^2 \phi(v)c^{i2\pi v(t-x/v)} dv$$

și fiindcă

$$(vV^{-1}) = \lambda^{-1} = p/h$$

$$(vV^{-1})^2 = \frac{p^2}{h^2} = \frac{2m}{h^2} E_c$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = -8\pi^2 m h^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_c \Phi(v) c^{i2\pi v(t-x/v)} dv$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} E_0 \Phi(v) c^{i2\pi v(t-x/v)} dv = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$$

Înlocuind această valoare obținem

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = i2\pi h^{-1} \left[E_p \psi(x,t) - h^2 (8\pi^2 m)^{-1} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \right]$$

Relație cunoscută sub denumirea de ecuația Schrödinger monodimensională dependentă de timp. În regim staționar $\psi(x,t) = \Psi(x) c^{i2\pi v t} = \Psi(x) c^{i2\pi E h^{-1} t}$ și în consecință

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = i2\pi E h^{-1} \Psi(x) c^{i2\pi E h^{-1} t}$$

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = i2\pi E h^{-1} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} c^{i2\pi E h^{-1} t}$$

iar ecuația lui Schrödinger devine în regim staționar

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - E_p) \psi(x) = 0$$

Relația de incertitudine a lui Heisenberg face ca sistemele pe care le studiem să nu fie niciodată în stare staționară, deoarece orice încercare a noastră de a obține informații asupra sistemului îl scoate din starea staționară, în aceste condiții funcția ψ fiind o funcție atât de coordonata x cât și de timpul t , putem spune că sistemele ne oferă informații numai atunci când ele trec dintr-o stare staționară în alta. Cu toate acestea, conceptul de undă asociată se dovedește a fi util.

V.3. Interpretarea probabilistică a undelor de Broglie

Interpretarea probabilistică a undelor de Broglie a fost dată de Max Born în anul 1926. Conform acestei interpretări, în mecanica cuantică nu se poate vorbi decât despre probabilitatea de a găsi o microparticulă într-un anumit punct al spațiului, la un anumit moment.

Probabilitatea respectivă este proporțională cu pătratul amplitudinii undelor de Broglie asociate acestor microparticule. Starea unui anumit sistem cuantic (una sau mai multe particule) este descrisă în mecanica cuantică ca o funcție complexă numită funcție de undă care depinde de coordonatele de poziție ale microparticulelor și de timp. Pătratul modulului funcției de undă este egal cu densitatea de probabilitate

(probabilitatea raportată la unitatea de volum).

$$\frac{dp}{dV} = w = |\psi|^2 = \psi^* \psi$$

ψ^* este funcția complex conjugată a funcției de undă ψ .

Probabilitatea fiind o mărime pozitivă, iar funcția de undă o mărime complexă este necesar să se considere produsul $\psi^* \psi$ ca fiind pozitiv, pentru ca și rezultatul să fie pozitiv. Probabilitatea (dP) de a găsi o microparticulă într-un element de volum dV delimitat de domeniul D este:

$$dP = |\psi|^2 dV = \psi^* \psi dV$$

Probabilitatea de a găsi cu certitudine microparticula undeva în interiorul domeniului D , la un moment t , este egală cu unitatea

$$P = \int_D |\psi|^2 dV = 1$$

Aceasta exprimă condiția de normare a funcției de undă. Undele de Broglie asociate microparticulelor nu au sens fizic analog undelor clasice, ele nefiind legate de un transport de energie. Undele de Broglie sunt unde de probabilitate.

Cunoscând probabilitatea diferitelor poziții ale microparticulei, în spațiu, putem calcula valoarea medie a razei vectoriale \vec{r} utilizând definiția statistică a mediei.

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} \rangle &= \iiint r dP = \iiint r |\psi|^2 dV \\ \langle \vec{r} \rangle &= \iiint \psi^* r \psi dV \end{aligned}$$

Această formulă poate fi scrisă pentru toate componentele x, y, z ale vectorului de poziție \vec{r}

$$\langle x \rangle = \int \psi^* x \psi dx ; \langle y \rangle = \int \psi^* y \psi dy ; \langle z \rangle = \int \psi^* z \psi dz ;$$

Așadar, cunoscând funcția de undă $\psi(x, y, z)$ în reprezentarea coordonatelor putem calcula probabilitatea cu care în urma măsurărilor, putem obține valori ale unor variabile dinamice, funcții de coordonate, precum și valorile medii ale acestora. Deocamdată este mai important să vedem cum se poate calcula funcția de undă ψ pentru o microparticulă aflată într-un câmp de forțe.

V.4. Ecuația lui Schrödinger

Aspectul matematic al dualismului undă-corpusul este dat de ecuația lui Schrödinger. Să considerăm mișcarea unei particule de masă m_0 și energie ϵ care nu este supusă acțiunii vreunui câmp de forțe și căreia în procesul mișcării îi este asociată o undă plană -unda de Broglie care se deplasează cu viteza de fază:

$$U = \lambda v = \frac{\omega}{k} \quad \text{reprezentată prin funcția de undă } \psi(\vec{r}, t)$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i\omega t} = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

Problema esențială constă în aceea ca din cunoașterea funcției de undă $\psi(\vec{r}, t)$ la un moment dat, să se determine această funcție de undă $\psi(\vec{r}, t)$ la un moment ulterior. Această problemă impune cunoașterea ecuației de propagare a unei reprezentată prin funcția $\psi(\vec{r}, t)$.

O asemenea ecuație de propagare (care este chiar ecuația Schrödinger) nu se deduce ci se postulează, iar dovada valabilității ei se face prin confruntarea rezultatelor teoretice obținute cu ajutorul ei cu datele experimentale.

Ecuația de propagare a undelor este dată de relația:

$$\Delta \psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

și poate fi extinsă și în cazul propagării undelor de Broglie; calculăm derivatele în funcție de unda $\psi(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -i\omega \cdot \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= i^2 \omega^2 \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t} = -\omega^2 \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuație obținem:

$$\begin{aligned} \Delta \psi(\vec{r}) + \frac{4\pi^2}{u^2 T^2} \psi(\vec{r}) &= 0 \\ \Delta \psi(\vec{r}) + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi(\vec{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Ținând seama de relația lui de Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{2\pi h}{p} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{p^2}{h^2}$$

Și de legea conservării energiei avem:

$$\frac{m_0 u^2}{2} + V(\vec{r}) = \frac{p^2}{2m_0} + V(\vec{r}) = W = \text{const}$$

putem scrie deci:

$$\frac{p^2}{2m_0} = W - V(\vec{r}) \quad p^2 = 2m_0 [W - V(\vec{r})]$$

sau

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{p^2}{h^2} = \frac{2m_0}{h^2} [W - V(\vec{r})]$$

Înlocuind în ecuația undelor se obține o ecuație staționară a lui Schrödinger, ecuație independentă de timp:

$$\Delta\psi(\vec{r}) + \frac{2m_0}{h^2} [W - V(\vec{r})]\psi(\vec{r}) = 0$$

Ecuația Schrödinger atemporală nu descrie evoluția sistemelor atomice ci descrie proprietățile acestora în stările staționare. Soluțiile acestei ecuații diferențiale de ordinul doi, liniare și omogene permit să se determine energiile sistemelor atomice în stările staționare dacă se cunoaște energia potențială $V(\vec{r})$ a sistemului precum și funcțiile de undă corespunzătoare stărilor respective.

Pentru tratarea problemelor privind fenomenele în care starea sistemului atomic variază în timp trebuie folosită o ecuație în care funcția de undă trebuie să depindă și de timp nu numai de coordonatele spațiale.

V.5. Ecuația Schrödinger temporală

Funcția de undă poate fi pusă sub forma:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} = \psi(\vec{r}) \cdot e^{-i\frac{W}{h}t}$$

Derivând în raport cu timpul obținem:

$$\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{iW}{h}\psi(\vec{r}, t)$$

$$W \cdot \psi = -\frac{h}{i} \cdot \frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

În această ecuație atemporală se înlocuiește mărimea $W\psi(\vec{r}, t)$ cu cea calculată anterior:

$$\Delta\psi(\vec{r}, t) + \frac{2m_0}{h^2} \left(-\frac{h}{i}\right) \cdot \frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{2m_0}{2} V(\vec{r})\psi = 0$$

Care se retranscrie sub forma

$$ih \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m_0} \Delta\psi + \frac{2m_0}{h^2} V(\vec{r})\psi$$

Această ecuație reprezintă ecuația temporală a lui Schrödinger. Față de cealaltă formă, ecuația obținută nu mai conține energia totală W și are un caracter mai general.

V.6. Condiții care se impun funcției de undă. Valori proprii. Funcții proprii

Pentru ca rezultatele obținute pe baza soluțiilor ecuației lui Schrödinger să fie în concordanță cu datele experimentale, se impun asupra acestora următoarele condiții:

-să fie continue și să aibă derivate continue;

-să fie continue în tot spațiul căci altfel interpretarea probabilistică a lui $|\psi|^2$ nu ar mai avea sens;

-să fie univoce în întreg spațiul, adică în fiecare punct al spațiului funcția $\psi(\vec{r})$ să aibă o singură valoare;

-să se anuleze la infinit;

Astfel de soluții nu se pot găsi decât pentru anumite valori ale energiei $W_1, \dots, W_2, \dots, W_3, \dots$ numite valori proprii, iar soluțiile corespunzătoare acestor valori proprii se numesc funcții proprii $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$.

Dacă la o singură valoare proprie W corespund mai multe funcții proprii ψ_1, ψ_2, \dots se spune că avem degenerescență, iar dacă la o singură valoare proprie W corespunde o funcție proprie nu avem degenerescență.

Dacă valorile proprii W_n sunt negative ($W_n < 0$) ecuația lui Schrödinger nu admite soluții decât pentru valorile proprii care formează un spectru discret (prin spectru se înțelege totalitatea valorilor proprii) în care caz microparticulele sunt localizate într-un domeniu finit.

Dacă valorile proprii W_n sunt pozitive ($W_n > 0$) acestea formează un spectru continuu, funcțiile de undă nu se anulează la infinit, iar microparticulele nu sunt localizate într-un domeniu finit.

Funcțiile proprii, în cazul în care nu există degenerescență, formează un sistem ortogonal satisfăcând condiția de ortogonalitate:

$$\int_D \psi_n \psi_m^* dV = 0, \quad m \neq n$$

Unde ψ_m^* este funcția complex conjugată a funcției de undă ψ_m . Ca urmare ψ_m și ψ_n sunt funcțiile de undă proprii care corespund valorilor proprii W_m și W_n , atunci când m și n satisfac condiția de normare:

$$\int_D \psi_n \psi_m^* dV = 1, \quad m = n$$

Aceste două condiții pot fi descrise de relația de ortonormare:

$$\int_D \psi_n \psi_m^* dV = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

V.7. Numere cuantice

Soluțiile ecuației lui Schrödinger permit determinarea probabilității prezenței electronului în jurul nucleului pe orbitalul atomic. Electronul ocupând o orbită este caracterizat de patru numere cuantice:

1. **Numărul cuantic principal n** determină numărul straturilor electronice.

Electronii cu același număr cuantic principal se găsesc la aceeași distanță de

nucleu formând un strat electronic. Numărul cuantic principal n poate avea valorile 1, 2, 3, 4, 5, 6 și 7 care se numesc stratul K, L, M, N, O, P și Q.

2. **Numărul cuantic secundar l** determină substraturile electronice, adică orbitele și forma lor care poate fi circulară sau eliptică. Valorile lui l depind de n și anume $l \in [0, n-1]$
3. **Numărul cuantic magnetic m** determină poziția spațială a planului orbitelor electronice $m \in [-l, l]$
4. **Numărul cuantic al spinului s** se datorează mișcării electronului în jurul propriei axe $s \in \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$

Reguli de distribuire a electronilor:

Regula lui Klechkowski ordinea de completare a orbitalilor atomici(O.A.) urmează riguros principiul energiei care este dat de succesiunea sumei $(n+l)$ a diferiților O.A. În cazul în care 2 sau mai mulți O.A. au aceeași sumă $(n+l)$, se completează mai întâi O.A. cu n minim.

Principiul lui Pauli doi electroni ai unui atom diferă prin cel puțin un număr cuantic.

Regula lui Hund O.A. de aceeași energie (degenerați, din același strat) se ocupă cu electroni astfel încât să aibă spin maxim.

Fiecare strat de electroni este format din substraturi, iar substraturile din una sau mai multe orbite între care există diferențe de energie, astfel:

CAP. VI. NOȚIUNI GENERALE DE TERMODINAMICĂ

Termodinamica studiază procesele fizice care au loc în sistemele cu un număr foarte mare de particule în care intervin și fenomene termice.

Ea analizează producerea, transportul, transformarea și utilizarea căldurii și a lucrului mecanic. Studiul fenomenelor se face cu ajutorul legilor generale empirice.

VI.1. Sistem termodinamic. Stare a sistemului. Parametrii termodinamici.

Vom face definiția sistemului termodinamic în viziunea microscopică asupra substanței ținând cont de structura discretă a acesteia.

Prin **sistem termodinamic** (ST) se înțelege o porțiune din univers delimitat de mediul exterior printr-o suprafață reală sau imaginară, realizată din unul sau mai multe corpuri macroscopice, conținând o cantitate finită de substanță, care este alcătuită dintr-un număr mare de particule elementare constituente (molecule, atomi, electroni liberi, etc.) și care poate interacționa cu mediul înconjurător.

Exemple de sisteme termodinamice: orice formă geometrică solidă, orice lichid aflat într-un vas, orice gaz aflat într-o incintă, orice amestec solid, lichid, gazos sau mixt, organismele biologice etc. Sistemele termodinamice pot fi:

- a) **Izolate**, dacă sistemul nu schimbă nici energie și nici substanță cu mediul exterior;
- b) **Închise**, dacă sistemul schimbă doar energie, dar nu și substanță cu mediul exterior;
- c) **Deschise**, dacă sistemul schimbă și energie, și substanță cu mediul exterior.

Starea unui sistem termodinamic. Mulțimea parametrilor fizici care descriu sistemul termodinamic la un moment dat constituie **starea** sistemului. Dacă acești parametri se mențin constanți în timp, spunem că sistemul termodinamic se află în *stare staționară*, iar dacă acești parametri evoluează sistemul se află în stare nestaționară.

Parametrii de stare ai unui sistem termodinamic. Pentru a putea studia starea sau evoluția unui sistem termodinamic, acestuia i se pot asocia o multitudine de parametri fizici definitorii, atât de natură macroscopică cât și de natură microscopică.

Parametrii termodinamici sunt mărimi observabile, măsurabile, care caracterizează sistemul termodinamic; de exemplu: densitatea, volumul, presiunea, temperatura, etc. Dacă parametrii de stare nu variază, sistemul termodinamic se află în echilibru. Un set de parametri de stare determină o anumită stare a ST.

Presiunea p este mărimea fizică scalară numeric egală cu raportul dintre mărimea forței F , care apasă perpendicular pe o suprafață plană a unui mediu fluid, și aria S a acestei

suprafețe: $p = \frac{F}{S}$.

Unitatea de măsură pentru presiune se numește *pascal*: $[p]_{SI} = \frac{N}{m^2} = Pa$.

Presiunea unui gaz, văzută macroscopic este un parametru direct măsurabil experimental (cu un manometru). În schimb văzută microscopic, este legată de viteza moleculară medie $\langle v \rangle$ a moleculelor de gaz care ciocnesc unitatea de suprafață transferând impuls senzorului manometric. Matematic expresia ei este următoarea:

$$p = nm\langle v^2 \rangle / 3$$

unde: n - reprezintă numărul de molecule în unitatea de volum

m - reprezintă masa

Volumul specific se referă la o anumită substanță și este volumul geometric ocupat de un număr de molecule egal cu numărul lui Avogadro

$$N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ molecule/mol}$$

Temperatura unui sistem este de asemenea legată de o mărime microscopică și anume energia cinetică medie a moleculelor. De exemplu pentru gazele perfecte expresia este următoarea: $\langle w \rangle = 3kT/2$ unde:

$\langle w \rangle$ - energia cinetică medie

T - este temperatura absolută

K = R/N₀ este constanta lui Boltzmann

Cu ajutorul acestor trei parametri presiune, volum și temperatură, putem descrie starea oricărui sistem termodinamic. Astfel relația:

$$f(p, V, T) = 0$$

reprezintă legătura dintre parametrii de stare pentru orice stare de echilibru a sistemului. Relația nu dă nici o indicație asupra stărilor intermediare ale unui proces termodinamic dar ea poate lega două stări una considerată inițială și cealaltă finală.

Considerând un sistem termodinamic cu parametrii p, V, T, o creștere dV a volumului va putea fi scrisă sub forma:

$$dV = Adp + BdT \quad \text{unde A și B pot fi niște funcții de p și T}$$

Deoarece într-o transformare variația lui V nu depinde de drumul urmat,

$$\int_{AB} dV = \text{cst.}$$

Adică dV este o diferențială totală exactă. Matematic acest lucru se scrie:

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{\partial B}{\partial p}$$

Exemplul acesta este verificat de ecuația gazelor perfecte: pV = nRT

Numărul gradelor de libertate ale unui sistem termodinamic îl constituie numărul parametrilor de stare independenți care pot descrie integral un anumit proces fizic. Există și alți parametri considerați necesari pentru descrierea respectivului proces fizic, aceștia se numesc parametri dependenți. Între ei se pot stabili relații matematice de legătură.

VI.2. Mărimi energetice specifice sistemelor termodinamice

Energia internă a unui sistem termodinamic U este o mărime fizică scalară, de stare a unui sistem termodinamic. Particulele constituite ale unei substanțe se află într-o continuă mișcare de agitație termică. La un moment dat, fiecare particulă posedă o energie cinetică dată de natura particulei și de conjunctura în care se află cu particulele vecine.

Căldura Q este o mărime fizică scalară *de proces* care măsoară transferul de energie prin contact termic între sistemele termodinamice în procesele care au loc între acestea. Căldura se măsoară, în S.I. în jouli (J), ca și energia.

$$\langle Q \rangle_{SI} = J$$

Caloria este unitatea de măsură tolerată în tehnică: 1 cal = 4,18 J

Contactul între un sistem termodinamic și un alt sistem din mediul exterior lui se realizează atunci când sistemul dat nu mai este izolat de mediul exterior, și au loc interacțiuni cu celălalt sistem. Contactul dintre cele două sisteme poate fi:

- a) Contact mecanic, atunci când schimbul de energie dintre sisteme se face prin lucrul mecanic realizat de forțele efectuate de unul dintre sisteme asupra celuilalt;
- b) Contact termic, atunci când schimbul de energie dintre sisteme se face exclusiv prin căldură;
- c) Contact prin schimb de substanță între cele două sisteme.

Procesul termodinamic se definește ca fiind trecerea unui sistem termodinamic dintr-o stare de echilibru în altă stare de echilibru. Procesul termodinamic mai poartă și numele de **transformare de stare**.

Clasificarea proceselor termodinamice din punct de vedere al evoluției parametrilor de stare ai sistemului

- *Procesele quasistatice* se desfășoară lent, parametrii de stare corespunzător stărilor intermediare pot fi determinați.
- *Procesele nestatice* se desfășoară rapid, dintr-o stare inițială de echilibru într-o stare finală de echilibru. Parametrii stărilor intermediare nu se pot determina și reprezenta grafic, deoarece nu sunt stări de echilibru.

Clasificarea proceselor termodinamice din punct de vedere al posibilității evoluției procesului termodinamic dintr-o stare în alta și invers (în ambele sensuri)

- *Procese reversibile* sunt acele procese în care evoluția poate fi în ambele sensuri, iar stările intermediare de echilibru sunt aceleași în ambele sensuri ale evoluției.
- *Procese ireversibile* sunt acele procese în care cel puțin una dintre condițiile de definiție ale proceselor reversibile nu este îndeplinită.

Clasificarea proceselor termodinamice din punct de vedere al relației dintre starea finală și cea inițială

- *Procesele ciclice* sunt acele procese în care starea finală coincide cu starea inițială.
- *Procesele neciclice* sunt acele procese în care starea finală nu coincide cu starea inițială.

Lucrul mecanic. Reprezentarea grafică a transformărilor de stare (proceselor termodinamice) într-un sistem de axe de coordonate (cum ar fi presiune volum) permite calculul matematic al lucrului mecanic L . Prin definiție lucrul mecanic este:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{r} = \int_1^2 \frac{F}{S} S dx = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

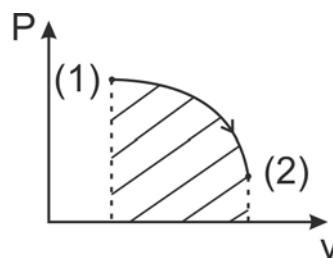


Fig. VI.1.

Într-adevăr se vede ușor că acesta reprezintă aria de sub curba procesului termodinamic. Semnul lucrului mecanic implicat într-o transformare se alege ținând cont de convenția de conform căreia L se consideră pozitiv când este disponibil pentru a fi utilizat și negativ când trebuie să-l efectuăm noi. Deci lucrul mecanic efectuat într-o destindere este pozitiv, iar cel cheltuit pentru micșorarea volumului (comprimare) este negativ.

VI.3. Echilibrul termic, noțiunea de temperatură, termometrie

Starea de încălzire a unui sistem termodinamic format din molecule depinde de mișcarea dezordonată datorită agitației termice a moleculelor sale.

Agitația termică reprezintă mișcarea permanentă și dezordonată a moleculelor unui sistem termodinamic în toate direcțiile și determină starea de încălzire a sistemului.

Difuzia este fenomenul care constă în pătrunderea moleculelor unei substanțe printre cele ale altei substanțe. Fenomenul de difuzie este foarte pregnant în cazul punerii în contact a două gaze, dar într-o mai mică măsură la punerea în contact a două lichide. Difuzia se produce mai repede la încălzirea sistemelor ale căror particule difuzează. Moleculele sau ionii din orice substanță aflată într-una din stările de agregare cunoscute sunt în permanență în mișcare, care depinde de starea de agregare și de starea de încălzire.

Echilibrul termic. Realizând un *contact termic* între două corpuri (unul cald și altul rece), fără schimb de energie prin efectuare de lucru mecanic sau schimb de substanță între ele, acestea ajung spontan și ireversibil, după un interval de timp, să aibă aceeași stare de încălzire. În această situație, corpurile nu mai schimbă între ele energie sub formă de căldură și se spune că se află în **echilibru termic**.

Temperatura empirică. Unei anumite stări de încălzire a sistemului termodinamic i se pune în corespondență un parametru numit **temperatură empirică** a sistemului. Pentru un sistem dat, temperatura este un parametru termodinamic *intern* de tip *intensiv*, având valori egale pentru stările de echilibru termodinamic care sunt între ele în echilibru termic și valori diferite pentru stările de echilibru termodinamic care nu sunt în relație de echilibru termic.

Scări de temperatură. Temperatura empirică este cuantificată printr-o mărime unitară numită *grad* și prin definirea convențională în grade a unor scări de temperatură. Măsurarea temperaturii, conform unei scări definite, se realizează cu anumite dispozitive denumite termometre.

- **Scara Celsius** cuantificată în grade Celsius ($^{\circ}\text{C}$) este o scară centigradă convențională și are ca temperaturi de referință, prin convenție, valoarea 0°C , corespunzător situației când gheața pură se topește la presiune normală, și 100°C , corespunzător situației când apa pură fierbe la presiune normală.
- **Scara Kelvin**, adoptată în Sistemul Internațional de Unități de Măsură, are fixat punctul zero al scalei la temperatura $-273,15^{\circ}\text{C}$. Temperatura absolută, egală cu zero ($T_0=0\text{K}$), corespunde stării materiei în care ar înceta mișcarea de agitație, termică a moleculelor. Unitatea de temperatură adică Kelvin-ul, are aceeași mărime ca și gradul de pe scara Celsius: $1\text{K}=1^{\circ}\text{C}$ $T[\text{K}] = t[^{\circ}\text{C}] + 273,15$
- **Scara Fahrenheit** fixează aceleași stări de referință ca și scara Celsius, dar le atribuie alte valori: 32°F , corespunzător situației când gheața pură se topește la presiune normală, și 212°F , corespunzător situației când apa pură fierbe la presiune normală. $T(^{\circ}\text{F})=32+1,8t(^{\circ}\text{C})$

Masa moleculară (absolută) a unei molecule, notată m_0 , este masa unei molecule de substanță exprimată în kilograme.

Unitatea atomică de masă este definită ca a 12-a parte din masa izotopului de carbon $^{12}_6\text{C}$.

$$1 \text{ u} = \frac{m_{^{12}_6\text{C}}}{12} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg.}$$

Masa moleculară relativă a unei molecule, notată m_r , reprezintă numărul adimensional care arată de câte ori masa absolută a unei molecule este mai mare decât masa

$$\text{etalon } u: m_r = \frac{m_0}{u}.$$

VI.4. Structura discretă a substanței. Molul.

Noțiunea de masă, definită la mecanică, exprimă proprietățile inerțiale macroscopice

ale unui sistem. Pentru evidențierea *structurii discrete* a substanței definim alte mărimi, referitoare la particule elementare constituente ale unui sistem, la cantitatea și numărul acestora. Orice corp este constituit din atomi asociați în molecule.

Molul este unitatea fundamentală pentru exprimarea cantității de substanță dintr-un sistem fizic. Un mol este definit ca fiind cantitatea de substanță a cărei masă, exprimată în grame, a unui sistem conținând atâtea particule constituente câți atomi există în 12 grame de carbon 12 ($^{12}_6C$).

Orice sistem termodinamic este caracterizat de mărimile prezentate mai jos:

Masă molară, notată μ , este masa unui mol dintr-o substanță constituită din molecule, exprimată în grame, care este numeric egală cu masa moleculară relativă a moleculelor constituente și depinde exclusiv de natura substanței: $\mu = m_r$ (g/mol) sau ($kg/kmol$); $1 kmol = 10^3 mol$.

Numărul lui Avogadro, notat N_A , reprezintă numărul de molecule dintr-un mol de substanță: $N_A = \frac{1}{u} = \frac{1}{1,66 \cdot 10^{-24}} = 6,023 \cdot 10^{23}$.

Volumul molar V_μ reprezintă volumul ocupat de un mol de substanță. În aceleași condiții de presiune și temperatură, toate gazele ocupă același volum molar. În condiții normale de presiune și temperatură ($p_0 = 1,013 \times 10^5 N/m^2$ și $\theta_0 = 0^\circ C$), toate gazele ocupă volumul molar $V_{\mu_0} = 22,41 \cdot 10^{-3} m^3 / mol = 22,41 m^3 / kmol$.

Cantitatea de substanță a unui sistem, notată ν , exprimă numărul de moli conținuți de aceasta. Substanța este caracterizată de masa molară μ și volumul molar V_μ , iar sistemul conține N particule elementare (molecule, atomi, ioni, nuclee), ocupând un

volum V și având o masă totală $m = \nu \frac{N}{N_A} = \frac{m}{\mu} = \frac{V}{V_\mu}$.

VI.5. Principiile termodinamicii

Postulatul fundamental al termodinamicii

Un sistem termodinamic izolat de mediul exterior și aflat într-o stare de neechilibru va evolua spre o stare de echilibru termodinamic, în care va ajunge după un interval de timp și pe care nu o va părăsi de la sine.

Postulatul al doilea: Două sisteme termodinamice că sunt în echilibru termic (sau echilibru termodinamic) dacă aduse în contact termic nu schimbă căldură între ele. Astfel echilibrul termic reclamă existența unui parametru intensiv ce depinde de parametrii extensivi ai sistemului și de energia internă a acestuia. Acest parametru s-a numit **temperatură empirică** și manifestă proprietatea de **tranzitivitate**. Postulatul al doilea afirmă că „tranzitivitatea este o proprietate fundamentală a echilibrului termic.”

Primul principiu al termodinamicii: energia internă a unui sistem este funcție univocă de starea lui și variază numai sub influența interacțiunii cu exteriorul. Matematic se scrie:

$$Q = \Delta U + L$$

sau în scriere sub formă diferențială:

$$dQ = dU + dL$$

de unde

$$dU = dQ - dL$$

relație care confirmă că variația energiei interne a unui sistem termodinamic în urma evoluției

acestuiia între o stare inițială și una finală rezultă din schimbul de căldură și de lucru mecanic cu exteriorul. Ultima relație exprimă și constatarea că deși dQ și dL nu sunt diferențiale totale exacte, diferența $dQ - dL$ este diferențială totală exactă a energiei interne, ceea ce conferă energiei interne calitatea de **funcție de stare**. Aceasta înseamnă că variația ΔU a energiei interne între o stare inițială și una finală nu depinde de drumul urmat între cele două stări ci numai de valorile energiei interne U între cele două stări.

Lucrul mecanic și căldura sunt **funcții de proces** variația lor între două stări depinzând de tipul procesului care a condus la starea finală. Alegând ca și variabile independente temperatura absolută T și volumul V , putem demonstra în felul următor:

$$d\bar{Q} = dU - d\bar{L} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV$$

Pentru ca $d\bar{Q}$ să fie diferențială totală exactă este necesar să fie satisfăcută condiția:

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} + p\right)$$

Ceea ce implică:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 0$$

Condiție neconfirmată experimental.

În ceea ce privește $d\bar{L} = -pdV$, acesta poate fi scris, în general, ca:

$$d\bar{L} = -pdV + xdy$$

unde $x=0$ și $y=T$ sau p . Atunci, condiția ca $d\bar{L}$ să fie diferențială totală exactă este:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_V = \left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)_y = 0$$

Condiție care duce la un rezultat absurd pentru că: dacă $y = p \Rightarrow -1 = 0$ iar dacă $y = T \Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 0$; condiție neconfirmată experimental.

Principiul al doilea. În timp ce primul principiu al termodinamicii evidențiază energia internă ca funcție de stare, principiul al doilea evidențiază entropia S ca funcție de stare:

$$dS = \frac{d\bar{Q}}{T}$$

Principiul al treilea. Se poate observa că în considerațiile de mai sus lipsește precizarea privind comportamentul sistemelor fizice în vecinătatea temperaturii de zero absolut. Această precizare a fost postulată pe baza unor date experimentale

Experiența a demonstrat că nu există proces ciclic în care căldura să poată fi transformată integral în lucru mecanic și că procesele nevasistatice ireversibile ale unui sistem izolat adiabatic sunt însoțite întotdeauna de creșterea entropiei. Așadar practica impune formularea unui postulat suplimentar care se opune realizării temperaturii de zero absolut. Acest postulat reprezintă una din formulările celui de-al treilea principiu al termodinamicii. Adică: zero absolut nu se poate atinge prin nici o experiență; sau în formularea lui Nernst: entropia S spre zero Kelvin încetează să mai fie o funcție de stare, tinzând spre o valoare constantă S_0 care nu mai depinde de parametrii de stare. În cazul unui sistem fizic condensat (solid sau lichid) însăși entropia tinde către zero când $T \rightarrow 0K$.

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$$

Acest fapt se atribuie naturii cuantice a sistemelor fizice. Cu toate că principiul trei nu introduce noi funcții de stare, din punct de vedere cantitativ el precizează valoarea constantei aditive care apare prin integrarea expresiei matematice a principiului doi.

VI.6. Aplicații ale principiilor termodinamicii

1. Transformarea politropă. Se numește **transformare politropă**, transformarea termodinamică pe parcursul căreia sistemul schimbă atât căldură cât și lucru mecanic cu mediul înconjurător. Pentru a determina legea transformării politrope se scriu următoarele ecuații:

Ecuația termică de stare:

$$pv = RT$$

Forma diferențială a legii fundamentale a calorimetriei:

$$\delta q = cdT \rightarrow \delta q = c_n dT$$

$$c = c_n$$

unde c_n reprezintă căldura specifică a gazului perfect pe durata transformării.

Principiul I al termodinamicii:

$$\delta q = du + pdv$$

unde:

$$du = c_v dT$$

Relațiile lui Mayer:

$$c_p - c_v = R$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\Rightarrow c_n dT = c_v dT + pdv \Rightarrow dT = \frac{pdv}{c_n - c_v}$$

Diferențiem ecuația termică de stare:

$$RdT = pdv + vdp; \quad R = c_p - c_v$$

$$(c_p - c_v)dT = pdv + vdp \Rightarrow dT = \frac{pdv + vdp}{(c_p - c_v)}$$

Vom obține astfel:

$$\frac{pdv}{c_n - c_v} = \frac{pdv + vdp}{c_p - c_v} \Rightarrow \frac{c_p - c_v}{c_n - c_v} pdv = pdv + vdp$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{c_p - c_v}{c_n - c_v}\right) pdv + vdp = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c_p - c_n}{c_v - c_n}\right) pdv + vdp = 0 \mid : pv$$

Se notează $\left(\frac{c_p - c_n}{c_v - c_n}\right) = n$, unde n – exponent politropic

$$n \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0$$

Prin integrare, se obține:

$$n \ln v + \ln p = \ln(const) \Rightarrow \ln(pv^n) = \ln(const) \Rightarrow$$

Legea transformării politrope

$$pv^n = const$$

$$Tv^{n-1} = const$$

$$p^{\frac{1-n}{n}} T = const$$

Se particularizează transformarea politropă pentru celelalte transformări simple ale gazelor perfecte.

$$\text{Dacă } n \rightarrow \infty \Rightarrow p^{\frac{1}{n}} v = ct \Rightarrow p = 1 \Rightarrow v = ct \text{ (izocoră).}$$

$$\text{Dacă } n = 0 \Rightarrow pv^n = ct \Rightarrow p = ct \text{ (izobară).}$$

$$\text{Dacă } n = 1 \Rightarrow pv^n = ct \Rightarrow pv = ct \text{ (izotermă).}$$

Dacă

$$n = k = \frac{c_p}{c_v} \text{ (exponent adiabatic)} \Rightarrow pv^n = ct \Rightarrow pv^k = ct \text{ (adiabatică).}$$

Calculul căldurii în transformarea politropă

Prin definiție:

$$q_{12} = \int_1^2 c_n dT = c_n (T_2 - T_1) = -c_n (T_1 - T_2)$$

$$\text{Notăm } \frac{c_p - c_n}{c_v - c_n} = n \Rightarrow c_p - c_n = n(c_v - c_n) \Rightarrow c_n = \frac{nc_v - c_p}{n-1} \Rightarrow c_n = c_v \frac{n-k}{n-1}$$

$$q_{12} = \frac{nc_v - c_n}{n-1} (T_2 - T_1) = c_v \frac{n-k}{n-1} (T_2 - T_1)$$

Calculul lucrului mecanic în transformarea politropă

Prin definiție:

$$l_{12} = \int_1^2 p dv = \int_1^2 \frac{p_1 v_1^n}{v^n} dv = p_1 v_1^n \int_1^2 \frac{dv}{v^n} = p_1 v_1^n \left. \frac{v^{1-n}}{1-n} \right|_1^2$$

Deoarece:

$$p_1 v_1^n = p v^n \Rightarrow p = \frac{p_1 v_1^n}{v^n}$$

$$\int \frac{dv}{v^n} = \int v^{-n} dv = \frac{v^{-n+1}}{-n+1}$$

Rezultă că:

$$l_{12} = \frac{p_1 v_1^n}{1-n} \left| v_2^{1-n} - v_1^{1-n} \right| = l_{12} = \frac{p_1 v_1^n}{n-1} (v_1^{1-n} - v_2^{1-n}) = \frac{p_1 v_1^n}{n-1} \left(\frac{1}{v_1^{n-1}} - \frac{1}{v_2^{n-1}} \right)$$

din relația $v_1^n = v_1 \cdot v_1^{n-1}$

$$l_{12} = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} \right]$$

$$\text{Dar } p_1 v_1^n = p_2 v_2^n \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Se scrie mai departe:

$$l_{12} = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] = \frac{1}{n-1} \left(p_1 v_1 - p_1 v_1 \frac{p_2^{\frac{n-1}{n}}}{p_1^{\frac{n-1}{n}}} \right)$$

Următoarele relații pot fi scrise;

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{p_1^{\frac{n-1}{n}}} &= p_1^{1-\frac{n-1}{n}} = p_1^{\frac{n-n+1}{n}} = p_1^{\frac{1}{n}} \\ p_1^{\frac{1}{n}} & \\ p_1^{\frac{1}{n}} v_1 p_2^{\frac{n-1}{n}} &= p_2^{\frac{1}{n}} v_2 p_2^{\frac{n-1}{n}} = p_2 v_2 \\ l_{12} &= \frac{p_1 v_1 - p_2 v_2}{n-1} = \frac{R}{n-1} (T_1 - T_2) \end{aligned}$$

Variația energiei interne:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \int c_v dT = c_v (T_2 - T_1) \\ \Delta u &= q_{12} - l_{12} = c_v \frac{n-k}{n-1} (T_2 - T_1) + c_v \frac{k-1}{n-1} (T_2 - T_1) \\ \Delta u &= c_v (T_2 - T_1) \\ \Delta U &= m c_v (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

Transformări simple ale gazului perfect. Transformările termodinamice care pot apărea în cazul gazelor, considerând $m = \text{const.}$, sunt:

- **Transformare izotermă**, dacă pe tot parcursul desfășurării procesului, temperatura rămâne constantă ($T = \text{const.}$);
- **Transformare izocoră**, dacă pe tot parcursul desfășurării procesului, volumul rămâne constant ($V = \text{const.}$);
- **Transformare izobară**, dacă pe tot parcursul desfășurării procesului, presiunea rămâne constantă ($p = \text{const.}$);

- **Transformare oarecare**, dacă pe tot parcursul desfășurării procesului, nici unul dintre parametri p , V , T nu rămâne constant;
- **Transformare adiabatică**, dacă procesul se desfășoară fără schimb de căldură cu exteriorul ($Q=0$).

În transformarea izocoră ecuația procesului este:

$$\frac{p}{T} = ct; \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Lucrul mecanic efectuat $L = 0$

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = m\bar{c}_v(T_2 - T_1) = \frac{V}{k-1}(p_2 - p_1) [J]$$

În transformarea izobară:

$$\frac{V}{T} = ct; \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$L_{12} = p(V_2 - V_1) = mR(T_2 - T_1) [J]$$

$$Q_{12} = m\bar{c}_p(T_2 - T_1) [J]$$

$$U_2 - U_1 = Q_{12} - L_{12} = m\bar{c}_v(T_2 - T_1) [J]$$

În transformarea izotermă:

$$pV = ct; \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$L_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = mRT \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \cdot 2,303 \cdot \log \frac{V_2}{V_1} [J]$$

$$Q_{12} = L_{12} [J]$$

știind că:

$$\int p dV = p_1 V_1 \int \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln V \Big|_1^2$$

$$p_1 V_1 = pV \Rightarrow p = \frac{p_1 V_1}{V}$$

Pentru transformarea adiabată

$$pV^k = ct; \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^k$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$L_{12} = \frac{1}{k-1}(p_1 V_1 - p_2 V_2) = \frac{p_1 V_1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} \right] = \frac{p_1 V_1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right] [J]$$

$$L_{12} = \frac{p_1 V_1}{k-1} \left[1 - \frac{T_2}{T_1} \right] = \frac{mR}{k-1} (T_1 - T_2) [J]$$

$$Q_{12} = 0$$

$$U_1 - U_2 = L_{12} = m\bar{c}_v(T_2 - T_1) [J]$$

$$U_2 - U_1 + (p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{k}{k-1}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{k}{k-1}mR(T_2 - T_1) = m\bar{c}_p(T_2 - T_1)$$

VI.7. Distribuția moleculelor funcție de viteză

Pentru gazul monoatomic ideal, particula are numai trei grade de libertate de translație. De asemenea interacțiunea între particule este neglijată astfel încât energia este doar energie cinetică de translație și nu există energie potențială de interacțiune, energie cinetică de rotație sau energie de vibrație:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

$$\sum_\alpha e^{-\beta \varepsilon_\alpha} = \frac{1}{h^3} \int e^{-\frac{p^2}{2mkT}} d^3 p \int d^3 r = V \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \langle n_p \rangle = n \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}}$$

$$\text{Dar } p = mv \Rightarrow \langle n_v \rangle = n \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \text{ unde } v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Pentru a găsi numărul mediu de particule pe unitatea de volum se integrează după impulsuri în spațiul fazelor ($dp_x = d(mv_x) = m dv_x$):

$$\langle n \rangle = n \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{m^3}{h^3} \iiint e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$$

În coordonate sferice ($p^2 dp = (mv)^2 d(mv) = m^3 v^2 dv$):

$$\langle n \rangle = n \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{m^3}{h^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

Pentru a obține numărul mediu de particule cu componenta v_x a vitezei între v_x și $v_x + dv_x$ indiferent de valorile lui v_y și v_z se integrează după v_y și v_z :

$$\langle n \rangle = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int e^{-\frac{m}{2kT} v_x^2} dv_x \int e^{-\frac{m}{2kT} v_y^2} dv_y \int e^{-\frac{m}{2kT} v_z^2} dv_z$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m}{2kT} v_y^2} dv_y = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}} \text{ unde s-a făcut substituția}$$

$$\frac{m}{2kT} v_y^2 = x^2; x = v_y \sqrt{\frac{m}{2kT}}; dv_y = \sqrt{\frac{2kT}{m}} dx$$

analog pentru z,

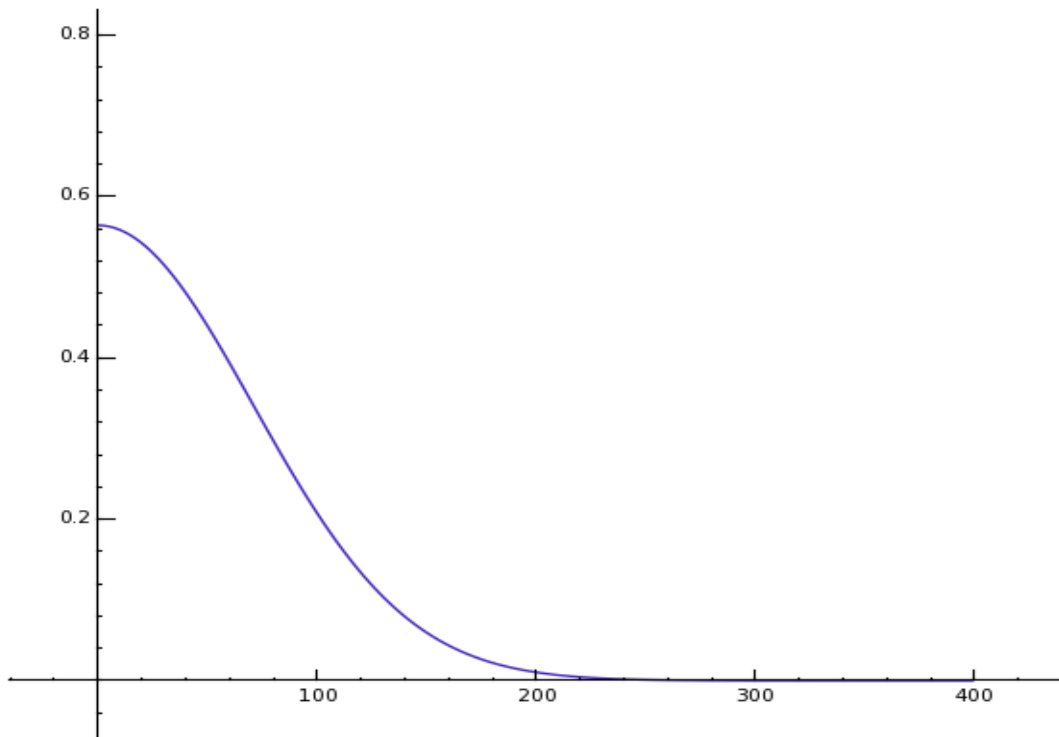
$$\Rightarrow \langle n \rangle = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2\pi kT}{m} \int e^{-\frac{m}{2kT} v_x^2} dv_x = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int e^{-\frac{m}{2kT} v_x^2} dv_x \equiv \int dn(v_x)$$

$$\Rightarrow dn(v_x) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{m}{2kT} v_x^2} dv_x$$

Funcția de distribuție este:

$$f(v_x) = \frac{dn(v_x)}{n dv_x} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{m}{2kT} v_x^2}$$

Funcția de distribuție are următoarea reprezentare grafică [3]:



Pentru a determina numărul mediu de particule pe unitatea de volum care au modulul vitezei cuprins între v și $v+dv$ se integrează în coordonate sferice în raport cu unghiurile:

$$\langle n \rangle = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^\infty v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot 2\pi \int_0^\infty v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \equiv \int dn(v)$$

$$\Rightarrow dn(v) = n4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \Rightarrow$$

$$f(v) = \frac{dn(v)}{ndv} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Maximul funcției de distribuție este viteza cea mai probabilă \Rightarrow

$$\frac{df(v)}{dv} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dv}\left(v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\right) = 0 \Rightarrow 2v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} - v^2 \frac{m2v}{2kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 0 \Rightarrow v_p^2 \frac{m}{kT} = 2$$

$$\Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Viteza medie a moleculelor este:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v dn(v) = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v n f(v) dv = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

$$\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v dv = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d(v^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

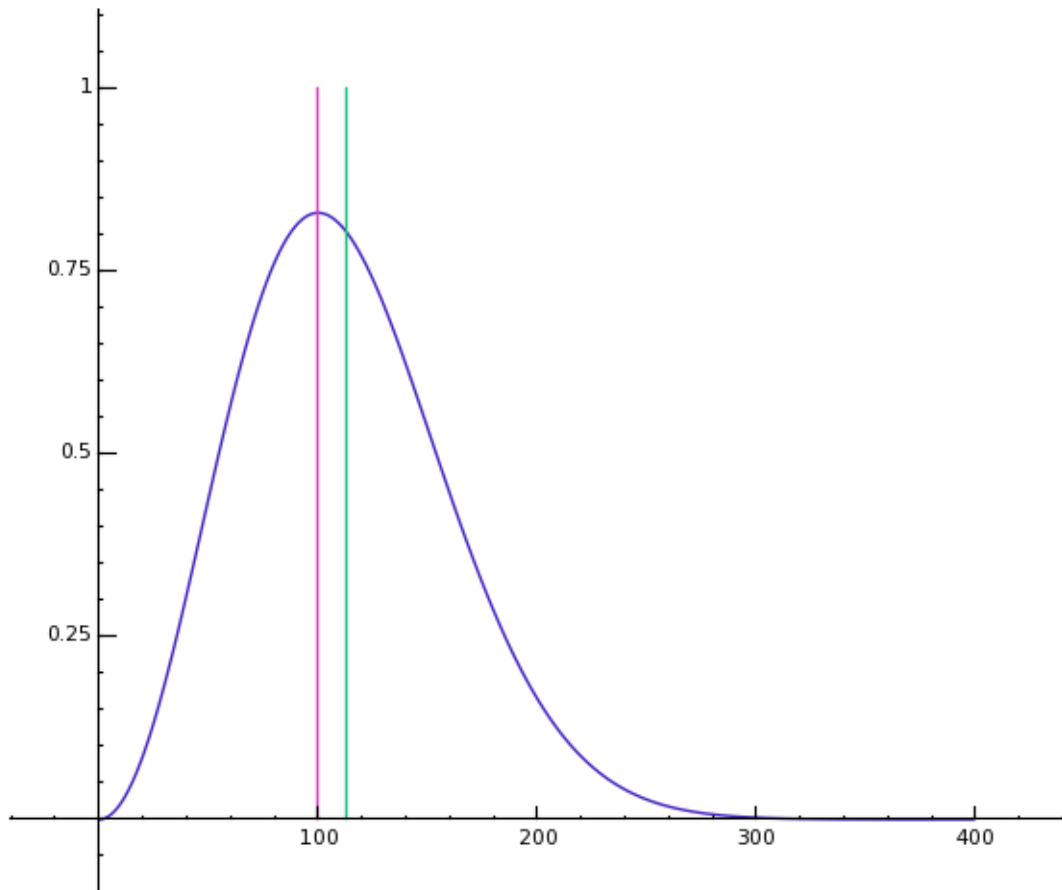
$$\text{unde s-a făcut substituția: } x = \frac{mv^2}{2kT} \Rightarrow v^2 = \frac{2kT}{m} x \Rightarrow d(v^2) = \frac{2kT}{m} dx$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x (-e^{-x})' dx = -x e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -(0-1) = 1 \Rightarrow$$

$$\langle v \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} 2\left(\frac{kT}{m}\right)^2 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$$

$$\langle v \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \frac{2v_m}{\sqrt{\pi}}$$

Funcția de distribuție are următoarea reprezentare grafică [3]:



Pe grafic s-a marcat cu linie roșie verticală viteza cea mai probabilă, respectiv cu linie verde verticală viteza medie.

Similar se poate calcula viteza termică:

$$v_T = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n} \int_0^\infty v^2 dn(v)} = \sqrt{\frac{1}{n} \int_0^\infty v^2 n f(v) dv} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v) dv} = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv}$$

$$\int_0^\infty v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\left(\frac{m}{kT} \right)^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

(integrala a fost calculată cu Maxima: <http://maxima.sourceforge.net>)

VI.8. Distribuția moleculelor unui gaz în câmp gravitațional

În mișcarea lor dezordonată, moleculele unui gaz se distribuie uniform în volumul vasului astfel că în medie în unitatea de volum este conținut un același număr de molecule. În starea de echilibru, presiunea și temperatura manifestă aceleași valori în întreg volumul. Toate aceste afirmații funcționează atâta vreme cât moleculele gazului nu sunt agregate de forțe exterioare care să le modifice repartiția spațială în volumul incintei.

În realitate asupra moleculelor gazului acționează forța de gravitate. Dacă nu ar exista agitația termică, moleculele de aer ar cădea pe Pământ formând un covor subțire de molecule de aer

pe suprafața terestră, iar în absența atracției gravitaționale toate moleculele ar evada în spațiu spre infinit. Mișcarea de agitație termică și atracția gravitațională împiedică atât căderea moleculelor pe Pământ cât și răspândirea lor spre infinit determinând stabilirea unei repartiții moleculare a cărei lege ne propunem să o stabilim în cele ce urmează.

Pentru aceasta vom considera o coloană verticală de aer și vom presupune că aproape de suprafața Pământului la $z=0$, presiunea aerului este p_0 în timp ce la altitudinea z valoarea presiunii este p . La o variație a altitudinii cu dz presiunea va varia cu dp . Cantitatea dp măsoară diferența greutateilor coloanelor de aer având ariile bazelor egale cu unitatea și înălțimile $z+dz$ și z .

$$dp = -\rho g dz$$

unde ρ este densitatea aerului iar g accelerația gravitațională. Dacă m este masa unei molecule iar n numărul din unitatea de volum,

$$\rho = n \cdot m$$

Înlocuind presiunea p cu $n k_B T$, rezultă $\rho = \frac{mp}{k_B T}$ și obținem:

$$dp = -\frac{mg}{k_B T} p dz$$

din care,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{k_B T} dz$$

Considerând că temperatura este aceeași la orice altitudine (presupunere ce nu este tocmai în concordanță cu realitatea) se obține prin integrare:

$$\ln p = -\frac{mg}{k_B T} z + \ln C$$

unde $\ln C$ reprezintă constanta de integrare. Ecuația este echivalentă cu,

$$p = C e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

Constanta C se determină impunând condiția ca la $z=0$ presiunea să fie p_0 . Se obține **formula barometrică**

$$p_\infty = p_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

care reprezintă legea scăderii presiunii cu altitudinea.

Ținând seamă că $p = n k_B T$ obținem o expresie similară și pentru variația densității moleculelor cu altitudinea:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

În realitate temperatura variază cu altitudinea astfel că aceste ecuații vor funcționa corect numai pentru diferențe de altitudine relativ mici, pentru care modificarea temperaturii nu este semnificativă.

De asemenea aceste calcule nu au luat în considerare dependența accelerației gravitaționale de altitudine, considerând constantă valoarea pentru g . Pentru altitudini mai mari trebuie să se

țină seama că accelerația gravitațională scade cu altitudinea urmând legea:

$$g(r) = \gamma \frac{M}{r^2} = \gamma \frac{M}{(R+h)^2}$$

unde

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{Kg}^2}$$

M este masa Pământului iar R raza medie a acestuia. Se ajunge astfel la formula barometrică corectată

$$p = p_0 \exp \left[-\frac{mgR}{k_B T} \left(1 - \frac{R}{R+h} \right) \right]$$

Din această formulă se constată că pentru $z \rightarrow \infty$ presiunea ar avea o valoare nenulă:

$$p_\infty = p_0 e^{-\frac{mgR}{k_B T}}$$

Aceasta înseamnă că atmosfera Pământului ca și a altor planete ar trebui să se întindă la infinit și că în întreg Universul ar trebui să avem o densitate a gazului definită de zero. Cum numărul moleculelor este finit iar Universul infinit va trebui să considerăm că atmosfera terestră nu este în stare de echilibru și că există o difuzie continuă a gazului spre infinit. Difuzia va continua încă milioane de ani deoarece un număr infim de molecule participă la fenomen. Alte corpuri cerești mai mici ca de exemplu Luna dacă au avut atmosferă au pierdut-o de-a lungul milioanele de ani.

VI.9. Legea lui Boltzmann

Formula barometrică numită și formula lui Laplace conține la exponențială expresia mgz a energiei potențiale a moleculei la înălțimea z . Se poate afirma că această formulă exprimă numărul n al particulelor din unitatea de volum a căror energie este $U = mgz$ în funcție de numărul n_0 de particule din unitatea de volum a căror energie este nulă (s-a considerat ca nivel de referință $U=0$ pentru energie, energia particulelor la cota zero). Nu există nici un motiv pentru care am putea crede că s-ar obține o altă lege de variație a densității moleculare cu altitudinea dacă în locul greutatei moleculare am considera o altă forță ce acționează asupra acestora, expresia energiei potențiale U căpătând în consecință o altă formă.

Prin urmare, dacă gazul se află într-un câmp de forțe oarecare astfel că particulele sale dobândesc o energie potențială U , densitatea de particule care au dobândit această energie potențială se calculează cu formula lui Boltzmann:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{k_B T}}$$

Această formulă arată că fracțiunea $\frac{n}{n_0}$ de particule ce au dobândit energia U depinde atât de

valoarea acestei energii cât și de temperatura constantă ceea ce ne determină să considerăm temperatura ca o mărime determinantă în distribuția particulelor ca funcție de energia lor. În virtutea acestei distribuții observăm că numărul moleculelor cu energii mari, este mai mic și anume cu atât mai mic cu cât valoarea lui U este mai mare. De asemenea cu cât temperatura

este mai scăzută cu atât mai repede fracțiunea $\frac{n}{n_0}$ scade cu creșterea valorilor U.

VI.10. Potențiale termodinamice

Metoda potențialelor termodinamice sau metoda analitică a fost introdusă de Gibbs utilizând ecuația fundamentală a termodinamicii sub forma:

$$TdS \geq dU - \sum_k P_k dX_k$$

Unde P_k -sunt parametri de tip intensivi

X_k –sunt parametri de tip extensivi

Se numește potențial termodinamic o funcție caracteristică a cărei valoare descrește în timpul evoluției spre echilibru a sistemului termodinamic. S-au definit următoarele potențiale termodinamice:

1. Entalpia: $H = H(p, S)$

$$H = U + pV$$

în cazul căreia s-a stabilit că:

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_p ; \quad V = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_S$$

și relația:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_p$$

numită a doua relație Maxwell.

2. Energia liberă definită cu relația: $F = F(V, T)$ $F = U - TS$

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V ; \quad p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$$

și relația:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

numită a treia relație Maxwell.

3. Entalpia liberă: $G(T, p)$ numită și potențial Gibbs.

$$G = F + pV$$

S-au stabilit relațiile:

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p ; \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T$$

și a patra relație Maxwell

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T$$

4. Și energia internă U este potențial termodinamic, care verifică relațiile:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V ; \quad p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S$$

și prima relație Maxwell:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$$

Cu aceste relații avem:

prima ecuație Gibbs – Helmholtz: $U = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$

a doua ecuație Gibbs – Helmholtz: $H = G - T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$

Prima ecuație Gibbs – Helmholtz a fost utilizată pentru a extrage enunțul principiului al treilea al termodinamicii. Celelalte relații vor fi importante în stabilirea caracterului statistic al parametrilor termodinamici.

VI.11. Semnificația statistică a potențialelor termodinamice

Este interesant de calculat expresia statistică a funcțiilor termodinamice, cum este de exemplu temperatura, entropia și-au alte mărimi termodinamice.

Vom începe prin a căuta semnificația statistică a entropiei pe baza distribuției microcanonice.

Pentru aceasta considerăm două subsisteme care au numărul de particule N_1 caracterizate de $2s_1$ coordonate generalizate și N_2 caracterizate de $2s_2$ coordonate generalizate, volumele V_1 și V_2 și energiile respective E_1 și E_2 . Elementele de volum din spațiul fazelor sunt $d\Gamma_1$ și $d\Gamma_2$. Punem în contact termic cele două subsisteme. Starea de echilibru a primului sistem este dată de funcția hamilton H_1 și de mărimea a^1 care caracterizează starea termică a sa, iar pentru al doilea subsistem starea de echilibru este determinată de hamiltoniana H_2 și de mărimea a^2 .

Cele două subsisteme formează un sistem izolat, descrierea stării acestuia se face în spațiul $(2s_1+2s_2)$ dimensional de hamiltoniana $H=H_1+H_2$ și de parametrii $(a_1$ și $a_2)$. Energia sistemului este $E=E_1+E_2$. Acestui sistem i se poate aplica distribuția microcanonică.

Densitatea de probabilitate a întregului sistem este diferită de zero și constantă numai între suprafețele de energie E și $E + \Delta E$ în toate celelalte regiuni fiind nulă.

$$\rho(p_i^{s_1} q_i^{s_1} p_i^{s_2} q_i^{s_2} a^1 a^2) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } E \geq H \geq E + \Delta E \\ \frac{1}{\frac{\partial \Omega}{\partial E} \Delta E} & \text{pentru } E \leq H \leq E + \Delta E \end{cases}$$

Probabilitatea ca punctul reprezentativ al sistemului S să se afle într-un element de volum $d\Gamma = d\Gamma_1 d\Gamma_2$ din spațiul fazelor este: $\rho d\Gamma_1 d\Gamma_2$

Dacă luăm în considerare numai subsistemul 1 atunci probabilitatea ca el să se găsească în elementul de volum $d\Gamma_1$ independent de starea subsistemului 2 este egală cu: $\rho_1 d\Gamma_1$. Această probabilitate se poate exprima și cu ajutorul relației, $\rho d\Gamma_1 d\Gamma_2$ integrând pentru toate stările posibile ale subsistemului 2 care are energia cuprinsă în intervalul:

$$E - E_1 \leq E_2 \leq E - E_1 + \Delta E,$$

energia subsistemului 1 fiind bine determinată.

$$\rho_1 d\Gamma_1 = \rho d\Gamma_1 \int_{E-E_1 \leq E_2 \leq E-E+\Delta E_1} d\Gamma_2$$

integrala reprezintă volumul $\Gamma_2(E_2)$ cuprins între suprafețele de energie constantă $E-E_1$ și $E-E_1+\Delta E$ și are valoarea:

$$\Gamma_2(E_2) = \frac{\partial \Omega_2(E-E_1)}{\partial(E-E_1)} \Delta E = \omega_2(E-E_1) \Delta E$$

se obține:

$$\begin{aligned} \rho_1 d\Gamma_1 &= \frac{1}{\frac{\partial \Omega}{\partial E} \Delta E} d\Gamma_1 \frac{\partial \Omega_2(E-E_1)}{\partial(E-E_1)} \Delta E = \\ &= \frac{1}{\omega(E)} \omega_2(E-E_1) d\Gamma_1 = \text{const} \omega_2(E-E_1) d\Gamma_1 \end{aligned}$$

deoarece energia totală a sistemului E și densitatea de stări $\omega(E)$ sunt constante. Această ultimă relație reprezintă formula de distribuție a stărilor mecanice ale unui subsistem cuprins într-un sistem. Calculăm în continuare probabilitatea ca punctul reprezentativ să fie cuprins în intervalul de energie E_1 și $E_1 + \Delta E_1$ când este în contact cu subsistemul 2, deoarece energian subsistemului nu are valoarea bine determinată. Aceasta se calculează cu relația:

$$p = \text{const} \omega_2(E-E_1) \int_{E_1 \leq E \leq E_1 + \Delta E_1} d\Gamma_1$$

Integrala reprezintă volumul cuprins între suprafețele de energie constantă E_1 și $E_1 + \Delta E_1$

$$\Gamma_1(E_1) = \frac{\partial \Omega_1(E_1)}{\partial E_1} \Delta E_1 = \omega_1(E_1) \Delta E_1$$

astfel că putem scrie sub forma:

$$p = \text{const} \omega_2(E-E_1) \omega_1(E_1) \Delta E_1$$

Densitatea de probabilitate, împărțind relația cu ΔE_1 , este

$$\rho = \text{const} \omega_2(E-E_1) \omega_1(E_1) = \text{const} \omega_2(E_2) \omega_1(E_1)$$

Funcțiile $\omega_2(E_2)$ și $\omega_1(E_1)$ sunt funcții rapid crescătoare de variabilele lor. Dacă însă E_1 crește, obligatoriu E_2 scade, deoarece suma lor este constantă. Aceasta înseamnă că densitatea de probabilitate are un maxim foarte pronunțat pentru o anumită valoare a lui E_1 numită energia cea mai probabilă E_{cmp} . Pentru a determina maximum funcției trebuie să derivăm această funcție și să o anulăm. Este mai comod ca să logaritmăm funcția și numai după aceea să facem celelalte operații.

$$\frac{d}{dE_1} \{ \ln \omega_2(E_2) + \ln \omega_1(E_1) \} = 0$$

deoarece, $dE_1 + dE_2 = 0$ relația de mai sus devine:

$$\frac{d \ln \omega_2(E_2)}{dE_2} - \frac{d \ln \omega_1(E_1)}{dE_1} = 0$$

$$\frac{d \ln \omega_2(E_2)}{dE_2} = \frac{d \ln \omega_1(E_1)}{dE_1}$$

Această egalitate este adevărată în starea specială când energia sistemului are valoarea $E = E_{\text{cmp}}$. Se vede că la echilibru fiecare termen depinde numai de caracteristicile specifice ale fiecărui subsistem, acești termeni fiind egali. Se știe că la echilibru, parametrul care are aceeași valoare în tot sistemul este o funcție numai de temperatură. Din acest motiv, termenii de mai sus reprezintă niște funcții de temperatură, funcții care până la o constantă oarecare sunt chiar temperaturile termodinamice ale subsistemelor. deci,

$$\varphi_1(T_1) = \frac{d \ln \omega_1(E_1)}{dE_1} = \frac{1}{\theta_1}$$

$$\varphi_2(T_2) = \frac{d \ln \omega_2(E_2)}{dE_2} = \frac{1}{\theta_2}$$

unde θ se numește temperatură statistică.

Mărimea fizică exprimată prin relația:

$$\sigma_1(E_1) = \ln \omega(E_1)$$

$$\sigma_2(E_2) = \ln \omega(E_2)$$

se numește entropie statistică pentru cele două sisteme considerate. Dacă variația energiei sistemului S_1 se face numai pe seama schimbului de căldură cu sistemul S_2

$$dE = \delta Q$$

rezultă:

$$d\sigma(E) = \frac{\delta Q_1}{\theta}$$

Relație care reprezintă principiul al doilea al termodinamicii și arată că există un factor integrant al căldurii schimbate cu exteriorul. Înlocuind θ cu relația $\theta = kT$, unde k este constanta lui Boltzmann, iar T temperatura absolută, obținem relația între entropia statistică și entropia termodinamică:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{k}$$

$$S(E) = k\sigma(E)$$

și în final putem scrie:

$$S(E) = k \ln \frac{\partial \Omega(E)}{\partial E}$$

Relația obținută reprezintă celebra relație a lui Boltzmann, relație care face legătura dintre entropie, parametru macroscopic și caracteristicile microscopice ale sistemului, conținute în densitatea de stări.

Formula lui Boltzmann este deosebit de importantă, deoarece ea stabilește caracterul statistic al entropiei și în același timp ne dă posibilitatea să determinăm ecuațiile de stare, ceea ce este imposibil de determinat în termodinamică.

În acest fel am determinat condițiile macroscopice care trebuie îndeplinite la echilibru (egalitatea temperaturilor) cât și expresia statistică a entropiei. Celelalte funcții termodinamice, ca și ecuațiile de stare rezultă din acestea.

Etaple de lucru care trebuie urmate în rezolvarea oricărei probleme, atunci când se folosește distribuția microcanonică, sunt următoarele:

1) se calculează energia totală E a sistemului

2) se determină densitatea de stări $\omega(E) = \frac{\partial \Omega(E)}{\partial E}$

3) se calculează entropia până la o constantă aditivă, cu ajutorul formulei lui Boltzmann $S = k \ln \omega(E)$

4) se exprimă energia sistemului în variabile (S, V) ; în acest caz ea coincide cu energia internă a sistemului $E(S, V) = U(S, V)$

5) se determină celelalte funcții termodinamice din relațiile cunoscute:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V \quad F = U - TS$$

$$p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S \quad G = U + pV - TS$$

$$c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

În finalul discuțiilor vom prezenta următorul tabel recapitulativ

Distribuția	Condiții îndeplinite	Densitatea de probabilitate	Relația de bază	Etaple de lucru	Funcții termodinamice determinate
-------------	----------------------	-----------------------------	-----------------	-----------------	-----------------------------------

Micro canonic	$N;V;E=\text{const}$	$\rho = \frac{1}{\omega(E)\Delta E}$	$S=k\ln\omega(E)$	<p>Se calculează energia totală</p> <p>Se determină densitatea de stări</p> <p>Se calculează entropia</p> <p>Se exprimă energia sistemului în variabile (SV)</p> <p>Se determină celelalte funcții termodinamice</p>	$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$ $P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$ $F=U-TS$ $G=U+PV-TS$
canonic	$N;V;T=\text{const}$	$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E}{kT}}$	$F=-kT\ln Z$	<p>Se calculează energia totală a sistemului</p> <p>Se calculează integrala statistică sau integrala de configurație</p> <p>Se determină energia liberă F</p> <p>Se calculează celelalte funcții termodinamice</p>	$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ $G=F+pV$ $U=F+ST$
Macro canonic	$V;T;\mu=\text{const}$	$\rho = \frac{1}{\tilde{Z}} e^{-\frac{E-\mu N}{kT}}$	$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \tilde{Z}$	<p>Se calculează energia sistemului</p> <p>Se calculează integrala statistică macroscopică</p> <p>Se determină energia internă din integrala statistică</p> <p>Se calculează celelalte funcții termodinamice</p>	$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ $S = \int_0^T \frac{C_V}{T} dT$ $F=U-TS$

VII.2. Pompe de căldură

Pompa de căldură este o instalație termică cu ajutorul căreia se absoarbe căldură dintr-un mediu cu temperatură mai scăzută și se cedează altui mediu cu temperatură mai ridicată. Se știe că un sistem termodinamic care efectuează un ciclu Carnot în sensul acelor de ceasornic, constituie o mașină termică ideală care preia căldura Q_1 de la sursa caldă și cedează sursei reci căldura Q_2 efectuând lucrul mecanic L conform relației:

$$L = Q_1 - |Q_2|$$

Vom arăta mai jos că parcurgând ciclul Carnot invers sensului acelor de ceasornic sistemul poate răci sursa rece preluând de la aceasta o căldură Q_2 și transferând sursei calde o căldură Q_1 astfel încât $|Q_1| > |Q_2|$, cu condiția ca asupra sistemului să se efectueze din exterior un lucru mecanic egal cu diferența $|Q_1| - |Q_2|$.

Pentru a arăta acest lucru pornim de la ciclul Carnot ilustrat în fig. VII.5. în coordonate T – S (temperatură – entropie).

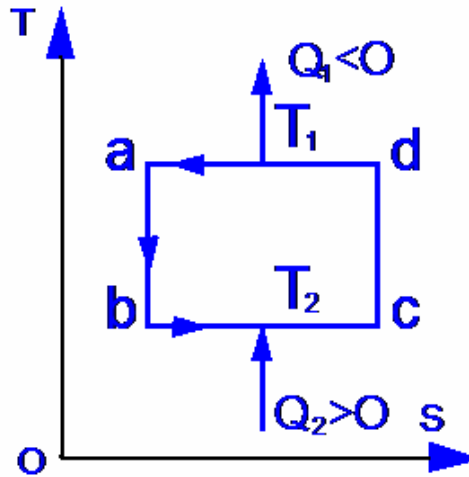


Fig.VII.5.

Procesul a-b constituie o destindere adiabată sistemul termodinamic răcindu-se de la temperatura T_1 a sursei calde, la temperatura mai mică T_2 a sursei reci, cu efectuarea unui lucru mecanic L_{a-b} dat de ecuația:

$$L_{ab} = C_V(T_2 - T_1) < 0$$

În ramura b-c sistemul suferă o destindere izotermă, efectuând lucrul mecanic $L_{bc} = Q_2 < 0$.

În procesul c-d sistemul fiind comprimat adiabetic, prin efectuarea din exterior a unui lucru mecanic, se încălzește de la temperatura T_2 la temperatura T_1 :

$$L_{cd} = C_V(T_1 - T_2) > 0$$

Și în sfârșit, în procesul d-a, sistemul este comprimat izoterm la temperatura T_1 , efectuându-se din exterior un lucru mecanic și transferându-se sursei calde o căldură echivalentă

$$\begin{aligned} Q_1 &= -|Q_1| \\ L_{da} &= -Q_1 = |Q_1| > 0 \end{aligned}$$

Lucrul total efectuat asupra sistemului pentru preluarea căldurii Q_1 de la sursa rece și transferarea căldurii Q_2 sursei calde va fi

$$L = L_{ab} + L_{bc} + L_{cd} + L_{da} = |Q_1| - |Q_2|$$

Un ciclu de tipul celui descris mai sus este denumit și pompă de căldură. Referitor la funcționarea acestor dispozitive se subliniază încă odată că în astfel de procese este posibilă

preluarea de căldură de la sursa rece, numai prin efectuarea din exterior a unui lucru mecanic. Mărimea caracteristică unei pompe termice este eficiența pompei sau randamentul:

$$\eta = \frac{|Q_1|}{L}$$

Ținând seama că procesul este ciclic și considerat cvasistatic reversibil, se poate aplica relația:

$$\frac{|Q_1|}{T_1} - \frac{|Q_2|}{T_2} = 0$$

Care rezultă din egalitatea lui Clausius:

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_a^b \frac{dQ}{T} + \int_b^c \frac{dQ}{T} + \int_c^d \frac{dQ}{T} + \int_d^a \frac{dQ}{T} = 0$$

$$\Rightarrow \oint \frac{dQ}{T} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Din care se deduce:

$$\frac{|Q_1|}{T_1} = \frac{|Q_2|}{T_2}$$

Cu aceasta și cu expresia lucrului mecanic dată mai sus obținem pentru randament

$$\eta = \frac{|Q_1|}{L} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad \text{când} \quad T_1 > T_2$$

Se poate constata cu ușurință că această mărime este subunitară.

Utilizarea pompei de căldură este economică atunci când se dispune de o energie termică provenită din recuperări sau ape geotermale și când se poate asigura un consum rațional de energie electrică. O instalație centralizată de încălzire și preparare a apei de consum în două trepte, cu pompă de căldură este reprezentată schematic în fig. VII.6.

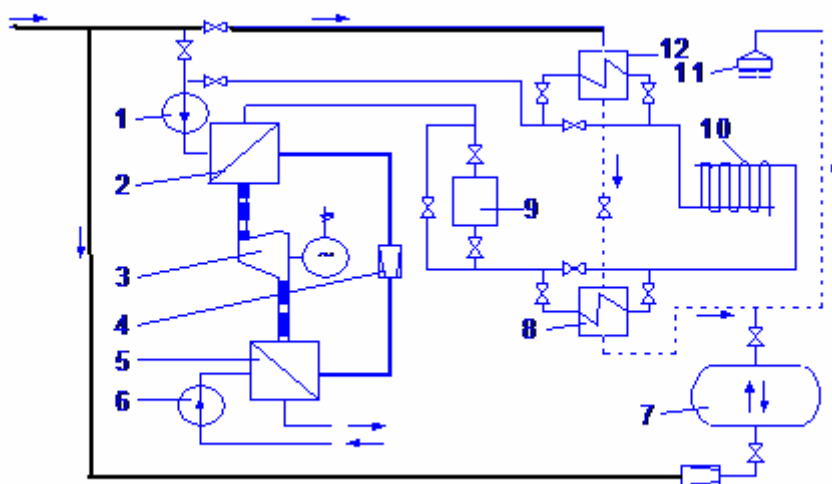


Fig.VII.6.

1 - pompă de circulație a agentului termic; 2 - condensator; 3 - compresor; 4 - ventil de laminare; 5 - vaporizator; 6 - pompă de circulație a agentului termic recuperat; 7 - acumulator de apă; 8 - schimbător de căldură trepta a-II-a; 9 - rezervor pentru amestec; 10 - instalație de

încălzire; 11 - instalație pentru apă caldă de consum; 12 - schimbător de căldură trepta I-a.

Instalația are trei circuite distincte: circuitul de apă caldă recuperată dintr-un proces tehnologic sau apă geotermală la temperatura de 30 -35° C, circuitul agentului de lucru al pompei de căldură (freonul) și circuitul instalației de încălzire. În vaporizatorul care este un schimbător de căldură multitubular în care prin țevi circulă agentul cu căldură recuperată, se produce evaporarea freonului, compresorul (3) aspiră și comprimă vaporii de freon obținuți, până la presiunea corespunzătoare temperaturii de condensare. Acest fenomen are loc în condensatorul (2) care este tot un schimbător, în care în exteriorul țevilor se produce condensarea vaporilor de freon cu cedarea unui debit de căldură către apa care circulă în interiorul țevilor și care reprezintă circuitul de încălzire. Ventilul de laminare are rolul de a alimenta constant vaporizatorul cu agentul de lucru în stare lichidă prin destinderea lichidului de la presiunea de condensare până la valoarea presiunii de vaporizare. Apa din circuitul de întoarcere al instalației de încălzire (10), cedează o parte din căldură în schimbătorul de căldură (12) reprezentând trepta I-a, apoi intră în condensatorul (2) de unde preia căldura rezultată din condensarea agentului de lucru. Atunci când temperatura agentului de încălzire nu este corespunzătoare graficului de reglaj, se realizează o ridicare a temperaturii în rezervorul de amestec (9) cu ajutorul unei surse suplimentare de căldură (centrală termică sau sursă electrică). După obținerea temperaturii necesare, agentul termic este pompat în schimbătorul de căldură trepta a-II-a (8) a apei calde de consum și în instalația de încălzire.

Tipuri de pompe de căldură. Cele două tipuri principale de pompe de căldură sunt pompe de căldură cu compresie și pompe de căldură cu absorbție. Pompele de căldură cu compresie întotdeauna funcționează pe energie mecanică (prin energie electrică), în timp ce pompele de căldură cu absorbție pot rula și pe căldură ca sursă de energie (prin intermediul de energie electrică sau combustibili). O serie de surse sunt folosite ca surse de căldură pentru încălzirea clădirilor private și administrative:

- pompe de căldură pe sursă de aer (extrag căldura din aerul exterior)
 - pompe de căldură aer-aer (transferă energie termică aerului din interior)
 - pompe de căldură aer-apă (transferă energie termică la un rezervor de apă)

 - pompe de căldură geotermale (extrag căldura din sol sau din surse similare)
 - pompe de căldură geotermale-aer (transfer de energie termică către aerul din interior)
 - pompe de căldură sol-aer de (solul este sursă de căldură)
 - pompe de căldură rocă-aer de (roca este sursă de căldură)
 - pompe de căldură apă-aer (corp de apă ca sursă de căldură)
 - pompe de căldură geotermale-apa (transferă căldură la un rezervor de apă)
 - pompe de căldură sol-apă (solul este sursă de căldură)
 - pompe de căldură roca-apă (roca este sursă de căldură)
- pompe de căldură apă-apă (corp de apă ca sursă de căldură)

CAP. VII. APLICAȚII

VII.1. Celula fotovoltaică

Este o aplicație a efectului fotoelectric care a fost descoperit în 1887 de către Hertz. Studiul acestui efect a fost reluat de către Hallwachs, Wiedemann și Stoletov. Prin efect fotoelectric se înțelege emisia de electroni de către unele substanțe sub acțiunea luminii. Pentru studiul emisieii fotoelectrice se folosește un dispozitiv alcătuit dintr-un tub vidat cu doi electrozi montat într-un circuit în care diferența de potențial poate fi variată atât ca mărime cât și ca sens. Galvanometrul G indică valoarea curentului pentru o anumită tensiune și la o anumită iluminare a catodului K (Fig. VII.1).

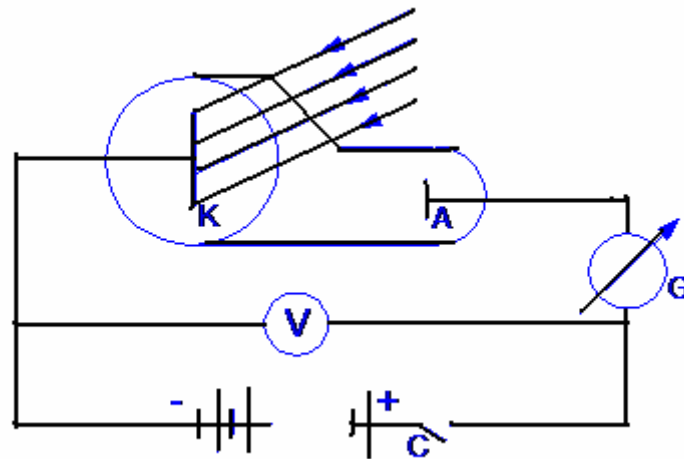


Fig. VII.1.

În acest fel se poate studia variația curentului fotoelectric funcție de tensiunea aplicată și funcție de intensitatea fluxului de lumină incident pe catod. Variația curentului fotoelectric cu tensiunea aplicată este ilustrată în fig. VII.2. prin curba plină.

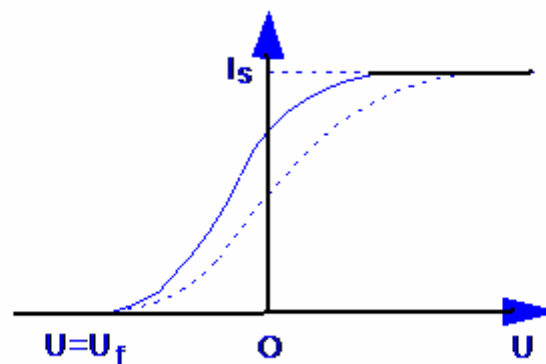


Fig. VII.2.

În cazul unui vid mai puțin înaintat și al unor electrozi mai slab purificați caracteristica curent tensiune are alura curbei punctate. Când curentul atinge valoarea de saturație toți electronii emiși sunt colectați la anod. Inversând sensul tensiunii se constată o scădere monotonă a fotocurentului iar la valoarea $-U_f$ a tensiunii curentul se anulează. La această tensiune de frânare energia cinetică maximă a electronilor este compensată de energia câmpului electric conform relației:

$$eU_f = \frac{1}{2}mv^2 \text{ unde } e - \text{ sarcina electronului iar}$$

m- masa acestuia

Mărind fluxul luminos, intensitatea curentului fotoelectric de saturație crește după cum este ilustrat în fig. VII. 3.

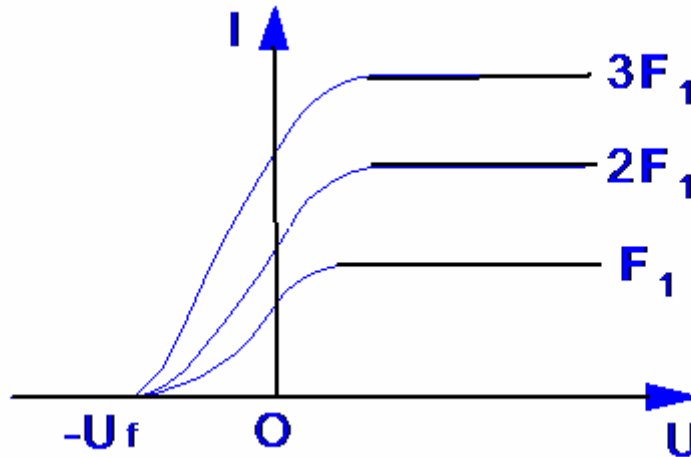


Fig.VII.3.

Deasemenea s-a constatat experimental că tensiunea de frânare crește liniar cu frecvența radiației incidente. Ca urmare s-au stabilit următoarele legi ale efectului fotoelectric:

1. Pentru producerea efectului fotoelectric este necesar ca lumina incidentă să aibă o frecvență mai mare decât o valoare limită numită prag fotoelectric. Pragul roșu al efectului fotoelectric este specific fiecărui metal.
2. Energia cinetică maximă a electronilor emiși nu depinde de iluminarea fotocathodului metalic ci numai de frecvența luminii incidente, crescând cu aceasta.
3. Numărul fotoelectronilor crește proporțional cu iluminarea fotocathodului.
4. Fenomenul se declanșează practic instantaneu.

În 1905 Einstein a reușit să explice în mod unitar și complet legile efectului fotoelectric. El aplică legea conservării energiei asupra procesului:

$$h\nu = W_e + \frac{mv^2}{2}$$

unde $h\nu$ - reprezintă energia fluxului de fotoni incidenti

W_e - este energia de extracție caracteristică fiecărui metal

$\frac{mv^2}{2}$ - este energia cinetică a electronilor extrași

În cazul în care fotonul doar smulge electronul fără să-i comunice și energie cinetică, putem scrie: $h\nu_0 = W_e$ unde prin ν_0 am notat frecvența de prag.

$$\nu_0 = \frac{W_e}{h} \quad \text{și} \quad \lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{ch}{W_e}$$

Rescriem ecuația lui Einstein și obținem pentru energia cinetică a electronului relația:

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - W_e = h\nu - h\nu_0 = h(\nu - \nu_0)$$

Care arată în mod clar dependența liniară a energiei cinetice a fotoelectronului de frecvența luminii incidente.

Conform teoriei lui Einstein în cazul efectului fotoelectric are loc o ciocnire mecanică între particula foton și corpusculul electron. Așadar lumina nu poate fi concepută ca având numai caracter ondulatoriu electromagnetic ci și caracter corpuscular. Corpusculul de lumină este fotonul. Efectul fotoelectric dovedește în acest fel natura discontinuă a luminii și a radiației în general.

În cazul unor semiconductori pe lângă efectul fotoelectric extern se poate pune în evidență și efectul fotoelectric intern. El constă în creșterea conductivității electrice sub acțiunea luminii. Aceasta înseamnă că un electron din banda de valență absorbind un foton $h\nu$ poate trece în banda de conducție, mărind astfel densitatea purtătorilor de sarcină mobili în semiconductor. Apariția sarcinilor electrice sub acțiunea luminii atrage după sine modificarea conducției electrice a semiconductorului, fenomen care se numește fotoconducție intrinsecă. În semiconductori există posibilitatea convertirii directe a energiei fluxului luminos în tensiune electromotoare, fenomen cunoscut sub denumirea de efect fotovoltaic.

Pe principiul efectului fotoelectric funcționează o serie de dispozitive cu o mare răspândire în automatizare și în conversia energiei radiante în energie electrică. Un prim exemplu îl constituie celulele fotoelectrice.

Celulele fotoelectrice cu vid precum și celula fotoelectrică cu gaz folosesc efectul fotoelectric extern cu scopul de a închide un circuit electric sub acțiunea luminii. În cazul celulelor cu gaz datorită ionizărilor, pentru un flux luminos dat se pot obține curenți mult mai mari.

Fotorezistențele folosesc efectul fotoelectric intern care apare la unii semiconductori. La o fotorezistență semiconductorul (cum ar fi seleniu, sulfură de cadmiu, de plumb, de talii, etc.) este depus sub formă de strat pe o plăcuță izolatoare, iar la marginile stratului sunt prinse două contacte metalice. Legând acești electrozi într-un circuit, curentul va putea fi modificat prin iluminarea fotorezistenței.

Celula fotovoltaică poate fi confecționată dintr-o lamă din cupru pe care se depune oxid cupros Cu_2O iar suprafața dintre cele două substanțe permite trecerea electronilor numai în sensul $\text{Cu}_2\text{O} \rightarrow \text{Cu}$ formând un strat de baraj. Peste stratul de Cu_2O se depune o peliculă subțire metalică, transparentă la lumină, care constituie împreună cu placa de cupru cei doi electrozi ai fotocelulei. Sub acțiunea luminii electronii de valență din Cu_2O sunt activați în banda de conducție. Aceștia trec prin stratul de baraj încărcând placa de cupru negativ și astfel acest dispozitiv devine generator. Pe lângă celulele cu Cu_2O se mai utilizează și celule cu seleniu și plumb sau telur și plumb. Sensibilitatea foarte mare a acestor celule de până la 1mA/lumen precum și faptul că pot lucra într-un domeniu foarte larg de lungimi de undă face ca aceste celule să poată fi folosite ca și luxmetre. Luxmetrul constă dintr-o celulă cu strat de baraj în circuitul căreia s-a conectat un instrument de măsură adecvat cu scala gradată direct în unități de iluminare (lx). Celula fotovoltaică produce deci curent pe seama energiei luminoase este deci un convertizor de energie. Randamentul ei însă este cuprins între 10-35%. În tehnică se utilizează celulele cu siliciu. În concluzie putem produce energie electrică folosind celula fotovoltaică, pe care o așezăm în contact cu razele soarelui. Panourile solare fotovoltaice sunt compuse din mai multe celule fotovoltaice conectate în serie și paralel pentru a obține o tensiune de lucru normată la 12V, 24V sau 48V. În general panourile fotovoltaice au tensiunea de lucru mult mai mare decât tensiunea standard operabilă, iar unul

dintre motive este regulatorul solar utilizat în aplicații off-grid. Panourile fotovoltaice sunt folosite pentru producerea de energie electrică în domenii diverse, începând de la centrale solare și terminând cu dispozitive complexe, cum ar fi sateliții.

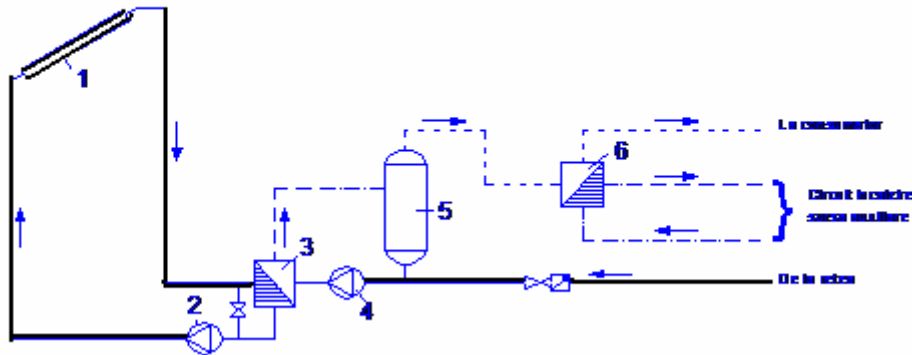


Fig. VII.4. Schema funcțională a unei instalații de captare a energiei solare pentru prepararea apei calde de consum

1- captator solar; 2- pompă circulație agent încălzire; 3- schimbător de căldură; 4- pompă circulație apă potabilă; 5- acumulator apă caldă consum; 6- schimbător de căldură cu agent termic sursă auxiliară

Modulele pot fi situate pe sol, pe acoperișuri care au o înclinare de aproximativ 30° sau pe terase. Acestea pot fi de tip izolat (Stand Alone) care se instalează în zonele în care nu există rețele electrice sau pot fi conectate la rețeaua electrică (grid connected) în care sistemul produce electricitate pentru consumul curent.

VII.3. Energia nucleară

Energia nucleară a debutat cu descoperirea radiațiilor ionizate, care au constituit doar o curiozitate de laborator, cunoscută numai câtorva inițiați. Descoperirea radioactivității artificiale și apoi aceea a fisiunii uraniului, în deceniul al patrulea al acestui secol, au dat un puternic imbold cercetărilor de fizică nucleară. Pentru marele public, energia nucleară a ieșit însă din anonim abia după aruncarea celor două bombe nucleare în 1945 asupra Japoniei. Astfel putem spune că ea a fost adusă la cunoștința omenirii prin forța distructivă și va fi privită multă vreme cu suspiciune. De aceea acest domeniu întâmpină destule obstacole în drumul dezvoltării ei în scopuri pașnice constructive.

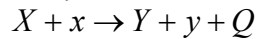
Energia nucleară se bazează pe reacții nucleare care sunt transformări suferite de nucleele atomilor unor substanțe când sunt bombardate cu particule alfa (nuclee de heliu), beta (electroni și pozitroni) și neutroni. Există două tipuri de reacții:

a) endoenergetice, dacă energia de reacție $Q < 0$ și ele se petrec cu absorbția unei părți din energia cinetică a particulelor incidente.

b) exoenergetice, dacă energia de reacție $Q > 0$ în care se eliberează energie nucleară fie sub formă de energie cinetică, fie sub formă de căldură sau ambele.

Prima reacție nucleară a fost descoperită în 1919 când Rutherford a constatat că nucleele de 1_7N bombardate cu particule ${}^4_2\alpha$ de energie mare, provenite din dezintegrarea radionuclidului ${}^{210}_{84}Po$ se transformă în nuclee de ${}^{17}_8O$ cu emisia unui proton. Se numește reacție nucleară transformarea unui nucleu atomic provocată de ciocnirea cu un alt nucleu

atomic, ea poate fi scrisă analog unei reacții chimice sub forma:



Sau se mai folosește notația comprimată: $X(x, y)Y$

Într-o reacție nucleară numărul de nucleoni care intră în reacție, este egal cu numărul de nucleoni rezultați din reacție. În 1934 Enrico Fermi a studiat reacții pe nucleele grele la bombardarea acestora cu neutroni. În experiențele lor Joliot Curie și Svitch, stimulați de Fermi au găsit printre produșii derivați un element beta – activ, pe care l-au luat drept un izotop al radiului. Otto Hahn și F. Strassman au încercat să identifice acest izotop. Uraniul la bombardarea cu neutroni lenți se scindează în două fragmente aproximativ egale ca mărime în urma procesului eliberându-se căldură și neutroni. Pentru energii nu prea mari ale particulelor bombardante, și anume sub 10 MeV, reacțiile nucleare se produc în general în două etape distincte. Termenul de energie nucleară este folosit în două contexte:

La nivel microscopic, energia nucleară este energia asociată forțelor de coeziune a nucleonilor dată de interacțiunea tare a protonilor și neutronilor din nucleele atomice.

La nivel macroscopic prin energie nucleară se înțelege energia eliberată prin reacțiile de fuziune nucleară din stele și din bombele cu hidrogen, respectiv cea eliberată prin fisiune nucleară în bombele atomice și în aplicațiile civile (centrale nucleare).

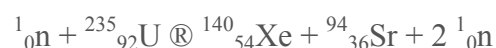
Exemple: bombardarea nucleului de azot cu o particulă α :



deci rezultă un izotop al oxigenului și un proton, iar reacția se numește transmutație nucleară.



Fisiunea nucleară este scindarea unui nucleu greu în două nuclee medii. Exemple de reacții de fisiune nucleară:

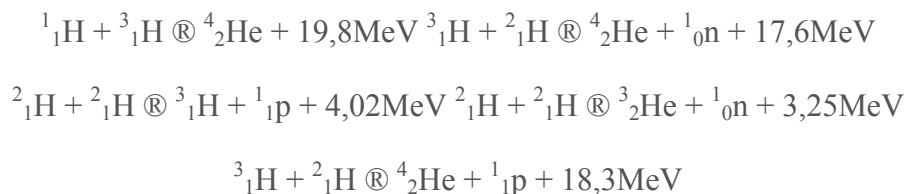


Explicația se poate face cu ajutorul modelului picătură al nucleului – un neutron lent (termic) captat de un nucleu greu, comunică nucleonilor acestuia energia lui de legătură și energia lui cinetică (vezi figura) și ca urmare crește agitația termică a nucleonilor, nucleul începe să vibreze, se alungește învingând forțele de tensiune superficială, până când forțele de respingere electrostatică dintre nucleoni, îl rup în două părți. Energia din starea de excitație a nucleului care este supus fisiunii se numește energie critică; de exemplu ${}^{235}_{92}\text{U}$ are $W_c = 6,5\text{MeV}$; ${}^{238}_{92}\text{U}$ are $W_c = 7\text{MeV}$. Sunt mai ușor fisionabile nucleele cu un număr de masă impar (${}^{235}_{92}\text{U}$, ${}^{239}\text{Pu}$) cu neutroni lenți și ${}^{238}_{92}\text{U}$ cu neutroni rapizi. Fisiunea nucleară eliberează o însemnată cantitate de energie, care se poate calcula prin diferența de masă, fiind de aproximativ 200MeV; deci 1kg ${}^{235}_{92}\text{U}$ produce prin fisiune 8.10^{13}J , energie care este echivalentă cu arderea a 2500 tone de ulei. Neutronii rezultați în urma proceselor de fisiune nucleară, dispun de o energie cinetică mare, ei putând îndeplini rolul de particule proiectil, dacă întâlnesc în drumul lor alte nuclee fisionabile. Pentru a avea loc reacția de fisiune, nucleele ușoare trebuie să se apropie la o distanță mai mică de 10^{-15}m , distanța la care apar puternic forțele de respingere coulombiană, deci nucleele care se unesc trebuie să aibă o

energie cinetică inițială mare, care se poate obține prin creșterea temperaturii la valori mari $T \gg 5 \cdot 10^9 \text{K}$, de aceea aceste reacții se mai numesc și reacții termionucleare.

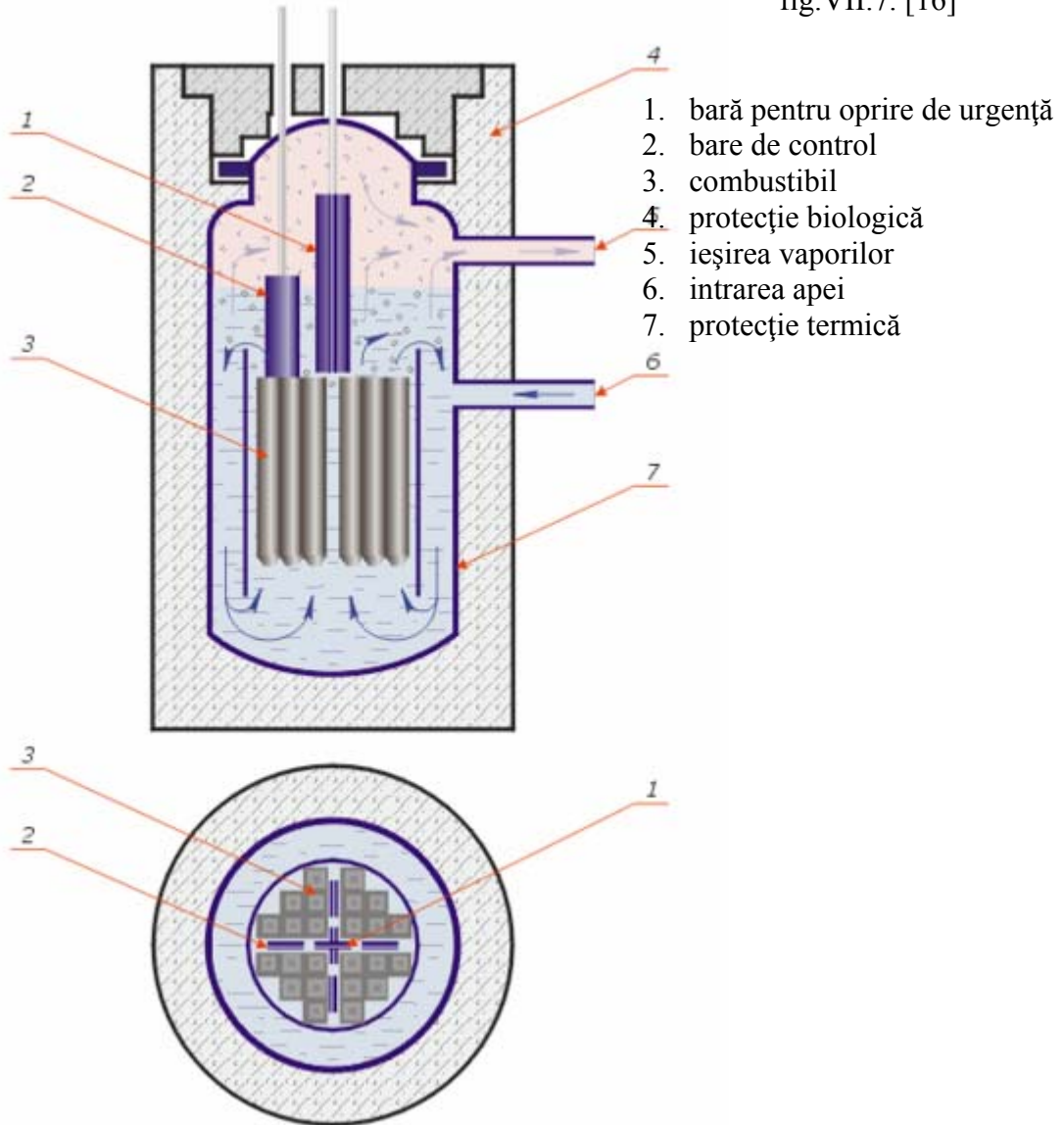
Reacția în lanț. În fisiunea nucleelor de uraniu s-a găsit o reacție care este declanșată de un neutron și care la rândul ei eliberează 1-3 neutroni; prin aceasta procesul furnizează proiectile noi și există posibilitatea ca procesul de fisiune să fie menținut, fără alimentare cu neutroni din exterior, sub forma unei reacții continue până la epuizarea completă a materialului fisionabil, deci avem o reacție în lanț; lucru care se poate întâmpla la nucleele de $^{235}_{92}\text{U}$, $^{233}_{92}\text{U}$, $^{239}_{92}\text{U}$ unde neutronii expulzați provoacă la rândul lor fisiunea altor nuclee. Uraniul natural este format dintr-un amestec de trei izotopi $^{235}_{92}\text{U}$ (0,714%), $^{238}_{92}\text{U}$ (99,28%) și $^{234}_{92}\text{U}$ (0,00548%), dar la reacția în lanț participă exclusiv $^{235}_{92}\text{U}$, dar nu toți neutronii rezultați în urma fisiunii pot produce alte fisiuni, o parte dintre ei fiind captați de nuclee de impuritate, alții de nuclee de $^{238}_{92}\text{U}$, iar altă parte ies din volumul de uraniu. Pentru a întreține reacția în lanț, în medie cel puțin unul din neutronii rezultați dintr-un nucleu, trebuie să producă o nouă fisiune. La o compoziție a materialului fisionabil această condiție este cel puțin egală cu o valoare, numită masă critică. Când mai mult de unul din neutronii expulzați dintr-un nucleu produc noi fisiuni, numărul fisiunilor în unitatea de timp crește în progresie geometrică și are loc explozia nucleară. Dacă numai un singur neutron dintr-un nucleu produce o nouă fisiune, numărul fisiunilor din unitatea de timp rămâne constant și atunci avem reacție în lanț controlată. Energia eliberată în urma fisiunii nucleare este de 200 MeV, iar la fisiunea tuturor nucleelor dintr-un kg de uraniu, se eliberează energia de $4,7 \cdot 10^{26} \text{MeV} = 7,5 \cdot 10^{13} \text{J}$, deci de $3 \cdot 10^{16}$ ori mai eficace decât huila.

Fuziunea nucleară. La fisiune se câștigă energie, deoarece fragmentele nucleare posedă energie de legătură medie per nucleon mai mare decât a nucleului de uraniu și rezultă ideea că energia eliberată la unirea constituenților nucleari într-un nucleu s-ar putea valorifica. Fuziunea nucleară este reacția nucleară de sinteză a unui nucleu greu, mai stabil, din nuclee mai ușoare. Dacă energia de legătură a unui nucleon a nucleelor inițiale este mai mică decât a nucleului final, diferența va fi eliberată în cadrul reacției; acest lucru este valabil pentru nucleele ușoare: ^1_1H , ^2_1D , ^3_1T , ^3_2He , ^7_3Li , deoarece din variația energiei de legătură per nucleon, în funcție de numărul de masă A, se constată că până la aproximativ $A = 6$; raportul DW_1/A este crescător continuu și variază mult mai rapid în zona elementelor ușoare, decât în zona elementelor grele și deci energia degajată în procesul de fisiune va fi mult mai mare decât cea din reacțiile de fisiune (ex: 0,85MeV/nucleon la fisiune și 4,95MeV/nucleon la fuziune). Pentru exemplificare dăm câteva reacții de sinteză (fuziune) a unor nuclee ușoare și energia eliberată:



Reactorul nuclear. Schema simplificată a unui reactor nuclear este prezentată în fig. VII.7.

fig.VII.7. [16]



Reactorul nuclear este o instalație în care este inițiată o reacție nucleară în lanț, controlată și susținută la o rată staționară (în opoziție cu o bombă nucleară, în care reacția în lanț apare într-o fracțiune de secundă și este complet necontrolată). Conceptul unui reactor nuclear a fost teoretizat încă din 1956 de Paul Kurola de la University of Arkansas. Deși omenirea a împlânzit recent puterea nucleară, primele reactoare nucleare care au apărut în mod natural, au fost găsite de către Francis Perrin în vestul Africii. Aceste cincisprezece reactoare de fisiune nucleară naturale, sunt numite „Reactoare Fosile Oklo”, ele funcționează de aproximativ 150 de milioane de ani, și au o putere medie de 100 kW. Reactoarele nucleare sunt folosite pentru numeroase scopuri. Cea mai semnificativă utilizare este pentru generarea de putere electrică. Reactoarele de cercetare sunt folosite pentru producerea de izotopi și pentru experimente cu neutroni liberi. Din punct de vedere istoric, prima folosire a reactoarelor nucleare a fost pentru producerea plutoniului folosit la bomba atomică. O altă utilizare militară este propulsia submarinelor și a vapoarelor (deși aceasta presupune un reactor mult mai mic decât cel folosit într-o centrală nucleare-electrică). În mod curent, toate reactoarele nucleare comerciale sunt bazate pe fisiunea nucleară și prezintă atât nesiguranță cât și risc crescut asupra sănătății. Centrala nucleară este o metodă sigură și nepoluantă de generare a energiei electrice care folosește o tehnologie bazată pe fuziunea nucleară în locul fisiunii nucleare. Există și alte instalații în care au loc reacții nucleare într-o manieră controlată, incluzând generatoarele termoelectrice radioizotope și bateriile atomice, care generează căldură și putere exploatând dezintegrările radioactive pasive, cum ar fi, de exemplu, instalațiile Farnsworth-Hirsch de producere a radiațiilor neutronice.

Aplicații. Principalele aplicații ale reactoarelor nucleare sunt: 1) în centralele nucleare-electrice pentru producția de căldură și generarea de electricitate folosite la încălzirea domestică și industrială; precum și pentru producția de hidrogen. 2) În propulsia nucleară utilizată în marină și la rachetele termonucleare. 3) În transmutație de elemente, la producția de plutoniu pentru armele nucleare; la obținerea diversilor izotopi radioactivi folosiți în medicină. 4) În cercetare pentru asigurarea de surse de radiații cu neutroni și pozitroni.

Centralele nucleare deși oferă energie electrică ieftină, au o mare problemă și anume deșeurile radioactive. Acestea sunt rezultatul activităților zilnice de întreținere, reparații, al opririlor programate sau neprogramate ale centralei. Deșeurile radioactive sunt:

- solide (plastic, celuloză, sticlă, etc.)
- lichide organice (ulei, solvent, lichid scintilator)
- amestecuri solide – lichide inflamabile

La sortarea deșeurilor radioactive se aplică anumite criterii cum ar fi: sursa de proveniență, felul materialului, conținutul de radionuclizi, debitul de doză la contact.

După sortare, deșeurile radioactive sunt stocate în containere speciale de inox. Deșeurile radioactive lichide organice urmează a fi solidificate pentru eliminarea pericolului de inflamabilitate. Unele deșeuri sunt compactate cu o presă hidraulică pentru reducerea volumului. Stocarea deșeurilor radioactive solide sau solidificate este asigurată pentru toată perioada de exploatare a centralei în condiții de securitate și păstrare optime. Depozitarea finală a acestor deșeuri se va realiza numai după condiționarea în matrice solide, sigure, care să garanteze că cel puțin 300 de ani nu vor avea impact negativ asupra mediului înconjurător.

După 50 de ani de energetică nucleară întrebarea „cum să se administreze aceste resturi materiale?” se confruntă cu probleme de securitate și tehnice. Una din importantele direcții de acțiune a industriei nucleare o constituie aceste costuri și riscuri pe termen lung asociate cu managementul deșeurilor radioactive. Administrarea combustibilului ars poate include variate combinații de stocare, reprocesare și depozitare finală. În practică, combustibilul ars este

stocat în piscine cu apă ușoară normală, de obicei chiar în incinta centralei. Apa asigură răcirea combustibilului ars și este un ecran de protecție împotriva radioactivității acestuia. După perioade de răcire și diminuare a nivelului de radiații, combustibilul ars este stocat (stocare uscată) fie în containere intermediare de oțel și beton monitorizate cu atenție, fie în depozite sub formă de puțuri adânci săpate în diferite formațiuni geologice. Reprocesarea combustibilului ars este atractivă deoarece permite reciclarea combustibilului nuclear și asigură pregătirea deșeurilor pentru depozitarea finală. Totuși, depozitarea finală este mult mai economicoasă deoarece reprocesarea combustibilului ars conduce la creșterea de 17 ori a cantității de deșeuri radioactive sub formă lichidă.

Bibliografie selectivă:

1. Gh. Ciobanu, Termodinamica si Fizica Statistica, Ed. Tehnica Bucuresti 2004
2. R. Titeica, I. Popescu, Fizica Generala vol I, Ed. Tehnica Bucuresti 1971
3. Graficele au fost realizate cu Sage: www.sagemath.org
4. E. Gerlach, P. Grosse, Physik eine Einführung für Ingenieure, B. G. Teubner Stuttgart, Leipzig 1999.
5. I. Cosma, Fizica, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1976
6. B. Rothenstein, Fizica I și II, Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timisoara 1982.
7. R. Feynman, Fizica modernă, vol. I, II, III, editura tehnică București, 1970.
8. I. M. Popescu, Fizică, vol. I și II, Editura Didactică și Pedagogică București 1983.
9. S. Filip, L. Marcu, Mecanică Fizică, Editura Universității din Oradea, 1998.
10. D. Auslender, I. Macavei, Fizică generală și nucleară, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
11. Halliday, R. Resnick, Fizică I și II, Editura didactică și pedagogică, București, 1975.
12. Gh. Cristea, Curs de fizică generală, Universitatea Babeș-Bolyai, 1990.
13. T. I. Crețu, Fizică generală, I, II, Editura Tehnică, București, 1986.
14. C. Plăvițiu, I. Petrea, A. Hristev, L. Georgescu, D. Borșan, V. Dima, R. Moldovan, Fizică moleculară, Editura Didactică și Pedagogică București, 1982.
15. V. Șimon, Allgemeine Physik für Biologen und Chemiker, Cluj University Press, 1999
16. http://ro.wikipedia.org/wiki/Reactor_nuclear.